ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.С. Дёмин, Т.И. Грекова

МАКРОЭКОНОМИКА

Учебное пособие

Томск – 2009

УДК 33
ББК 65.012.2

Дёмин Н.С., Грекова Т.И. Макроэкономика: Учебное пособие. – Томск: Издательство «ТМЛ–Пресс», 2009. – 228 с.

Учебное пособие включает описание, строгую математическую формулировку основных понятий макроэкономической теории и доказательство базовых результатов. В основе учебника лежит курс лекций, читаемый студентам факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Содержание учебного пособия соответствует требованиям Государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.

Для студентов, аспирантов и преподавателей специальностей «применение математических методов в экономике» и «прикладная математика и информатика».

УДК 33
ББК 65.012.2

Рецензенты:

Доктор экономических наук, профессор Томского государственного университета ***Т.И. Коломиец***.
Доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного университета ***А.Ф. Терпугов*** .
Доктор физико-математических наук, профессор, Томского политехнического университета ***С.В. Рожкова.***

Томский государственный университет, 2008

Введение

Макроэкономика как составная часть современной экономической теории, исследует характер, результаты и закономерности функционирования национальной экономики. В макроэкономике различаются анализ *ex post* и *ex ante*.

Ex post: анализируется ход и итоги экономической деятельности участников национального хозяйства в прошедшем периоде.

Ex ante: разрабатывается теория функционирования и развития национального хозяйства.

Цель настоящего курса – анализ ex ante, т.е. изучение теории макроэкономики, поскольку это первично, т.к. только в результате построенной теории возможен качественный анализ *ex post*.

Характерной особенностью макроэкономической теории является оперирование агрегированными (обобщёнными) экономическими категориями.

При макроэкономическом подходе национальная экономика предстаёт в виде взаимодействия четырёх субъектов (сектор домашних хозяйств, предпринимательский сектор, государство, заграница) на четырёх рынках (благ, труда, денег, ценных бумаг).

Состояние, при котором планы экономических субъектов оказываются совместно осуществимыми на всех рынках, называется общим экономическим равновесием.

Основные понятия макроэкономики

Валовой внутренний продукт (ВВП) – это сумма добавленных ценностей, созданных за определённый период всеми производителями, ведущими производство на территории страны.

Валовой национальный продукт (ВНП) – это ВВП минус сумма добавленных ценностей, созданных на территории страны посредством использования принадлежащих иностранцам факторов производства, плюс сумма добавленных ценностей, созданных за границей посредством использования принадлежащих гражданам данной страны факторов производства (ВНП $\neq$ ВВП).

Чистый национальный продукт (ЧНП) – это ВНП минус амортизация, т.е. величина обесценивания основного капитала.

Национальный доход (НД) — это ЧНП минус косвенные налоги плюс субвенции со стороны государства.

Сектор домашних хозяйств (СДХ) – это совокупность всех частных хозяйственных ячеек внутри страны, деятельность которых направлена на удовлетворение собственных потребностей. СДХ представляет 3 вида экономической деятельности:

а) предлагает факторы производства;

б) потребляет часть полученного дохода, покупая потребительские блага;

в) сберегает другую часть получаемого дохода, приобретая ценные бумаги и недвижимость.

Предпринимательский сектор (ПС) – это совокупность всех фирм, зарегистрированных внутри страны, деятельность которых направлена на производство и реализацию благ. ПС осуществляет 3 вида экономической деятельности:

а) закупка факторов производства;

б) производство и продажа продукции и услуг;

в) поддержание и развитие производственной базы.

Имущество – это любой источник законного нетрудового дохода (земля, жилые дома, капитал, ценные бумаги, лицензии, патенты и т.д.).

Национальное богатство (НБ) – это совокупность имущества, принадлежащего частным лицам и государству.

Деньги – это то, что используется в качестве:

а) меры ценности всех благ;
б) всеобщего платёжного средства;
в) формы сохранения ценности.

Деньги – это специфический вид имущества, не приносящий дохода при стабильном уровне цен.

Уровень цен – это денежная оценка благ.

Ликвидность – это свойство имущества, которое можно сразу и без издержек использовать в качестве платёжного средства.

ЧАСТЬ I. ПРОИЗВОДСТВО, ПОТРЕБЛЕНИЕ, НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС, ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ

Глава 1. Теория производства

Данная глава имеет то же название, что и статья американских учёных Д. Кобба и П. Дугласа, опубликованная в 1928 г. (Cobb G.W., Douglas P.H. " A theory of production". Amer. Econ. Rev. 1928. Mach. p.139 –165.)

В этой статье была предпринята попытка определить эмпирическим путём влияние величины затрачиваемого капитала K и труда L на объём Y выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США. Были использованы статистические данные за 1899 – 1922 гг., т.е. выборка

$$\{K_t, L_t, Y_t\}, \quad t = 1899, 1900, \ldots, 1922, \tag{1}$$

и поставлены следующие задачи:

1. Определить параметрический класс функций, наиболее точно приближающий количественные соотношения между тремя выбранными характеристиками производственной деятельности.
2. Найти числовые параметры, задающие конкретную функцию этого класса.
3. Сравнить результаты, полученные как значения функции, с фактическими данными.

Решение поставленных задач заключается в следующем:

1. Была взята функция (далее функция Кобба – Дугласа)

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}, \tag{2}$$

с условиями на параметры:

$$A > 0; \quad \alpha \geq 0; \quad \beta \geq 0; \quad \alpha + \beta = 1. \qquad (3)$$

2. На основе выборки $\{K_t, L_t, Y_t\}$ была решена задача определения численных значений параметров A, α, β по методу наименьших квадратов, т.е. задача

$$\sum_{t=1899}^{1922} [\ln Y_t - \ln A - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t]^2 \to \min_{\{A,\ \alpha,\ \beta\}} \qquad (4)$$

при выполнении ограничений (3). В результате было получено $A = 1{,}01$, $\alpha = 0{,}25$, $\beta = 0{,}75$, т.е.

$$Y = 1{,}01\, K^{0{,}25}\, L^{0{,}75}. \qquad (5)$$

3. Сравнение величин $Y(K_t, L_t)$, вычисляемых по формуле (5), с фактическими значениями Y_t из (1) дало хорошее совпадение результатов. Более того, хорошее совпадение было получено при расчётах по формулам (5) и для последующих лет (1923…1928).

§1.1 Производственные функции

Определение. Пусть Y – объём выпущенной продукции (ВВП), K – объём основного капитала (основных фондов), L – объём трудовых ресурсов. Тогда функция $F(\cdot)$ вида

$$Y = F(K, L), \qquad (1)$$

т.е. функция, определяющая зависимость объёма выпущенной продукции от затраченных на это объёмов основного капитала и трудовых ресурсов, называется производственной функцией (ПФ), а K и L – факторами производства.

Определим функциональный класс $F(K,L)$, который бы имел очевидную экономическую интерпретацию.

Определение. Производственные функции называются неоклассическими ПФ (НКПФ), если они удовлетворяют следующим неоклассическим условиям (НКУ):

1. $F(K,\mathrm{L}) \geq 0$, если $K \geq 0$, $L \geq 0$, и $F(K,L) = 0$, только если $K = 0$ и $L = 0$.

2. $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial L} > 0,$

т.е. ПФ является монотонно возрастающей функцией факторов производства.

3. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 K} < 0, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 L} < 0,$

т.е. ПФ является выпуклой вверх функцией факторов производства.

4. $\lim\limits_{K\downarrow 0} \dfrac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim\limits_{L\downarrow 0} \dfrac{\partial F}{\partial L} = \infty.$

5. $\lim\limits_{K\uparrow\infty} \dfrac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad \lim\limits_{L\uparrow\infty} \dfrac{\partial F}{\partial L} = 0.$

Замечание. Дать экономическую интерпретацию условий 1 – 5 и привести график НКПФ.

Определение. Функция $f(x_1,\ldots, x_n)$ называется однородной степени $\gamma > 0$ (ОФ_γ), если для любого $\lambda > 0$

$$f(\lambda x_1,\ldots, \lambda x_n) = \lambda^\gamma f(x_1,\ldots, x_n) \qquad (2)$$

Если $\gamma = 1$, то такая функция называется линейно однородной.

Формула Эйлера для $ОФ_\gamma$.

Если $f(x_1,\ldots, x_n)$ является ОФ_γ, то

$$\gamma f(x_1,\ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \; . \qquad (3)$$

Определение ПФ $F(K,L)$ называется однородной ПФ степени $\gamma >0$ (ОПФ_γ), если для любого $\lambda > 0$

$$F(\lambda K,\lambda L) = \lambda^\gamma F(K,L). \qquad (4)$$

Если $\gamma = 1$, то такая ПФ называется линейно однородной ПФ (ЛОПФ), и в этом случае

$$F(\lambda K,\lambda L) = \lambda F(K,L). \qquad (5)$$

Формула Эйлера для $ОПФ_\gamma$.

Если $F(K,L)$ является ОПФ_γ, то

$$\gamma F(K,L)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L\ . \qquad (6)$$

Если ПФ является ЛОПФ, то

$$F(K,L)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L\ . \qquad (7)$$

Замечание. Дать экономическую интерпретацию формулам (4) и (5) .

§2. Основные экономико-математические характеристики производственного процесса

Определение. Величина

$$y=\frac{F(K,L)}{L}, \qquad (1)$$

равная объёму произведённого продукта, приходящегося на единицу трудовых ресурсов (ТР), называется средней производительностью труда.

Определение. Величина

$$z=\frac{F(KL)}{K}, \qquad (2)$$

равная объёму произведённого продукта, приходящегося на единицу ОФ, называется средней фондоотдачей.

Определение. Величина

$$k=\frac{K}{L}, \qquad (3)$$

равная объёму ОФ, приходящихся на единицу ТР, называется фондовооружённостью.

Определение. Величина

$$v=\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}, \qquad (4)$$

характеризующая скорость возрастания объёма произведённого продукта за счёт возрастания ТР, называется предельной производительностью труда, или нормой прибыли с ТР.

Определение. Величина

$$r = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}, \tag{5}$$

характеризующая скорость возрастания объёма произведённого продукта за счёт возрастания ОФ, называется предельной фондоотдачей, или нормой прибыли с капитала.

Замечание. Дать экономическую интерпретацию формуле Эйлера для ЛОПФ, т.е. формуле (1.7).

Введённые выше пять экономико – математических характеристик являются размерными характеристиками. При этом y, z, v, r характеризуют абсолютные приросты произведённого продукта.

Представляют интерес безразмерные величины, связанные с относительными приростами произведённого продукта за счёт увеличения факторов производства на 1%.

Определение. Величина

$$\alpha = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}\frac{K}{F(K,L)}, \tag{6}$$

равная процентному приросту произведённого продукта, достигнутому за счёт прироста ОФ на 1%, называется коэффициентом эластичности по фондам.

Определение. Величина

$$\beta = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}\frac{L}{F(K,L)}, \tag{7}$$

равная процентному приросту произведённого продукта, достигнутому за счёт прироста ТР на 1%, называется коэффициентом эластичности по трудовым ресурсам.

Теорема 1. Если $F(K,L)$ является ОПФ$_\gamma$, то сумма коэффициентов эластичности по фондам и трудовым ресурсам равна степени однородности, т.е.

$$\alpha + \beta = \gamma. \tag{8}$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

Теорема 2. Если $F(K,L)$ является ЛОПФ, то средняя производительность труда больше предельной производительности труда, а средняя фондоотдача больше предельной фондоотдачи, т.е.

$$y > v, \quad z > r. \tag{9}$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

Комментарии:

1) Согласно определениям большим значениям α соответствует дефицит ОФ, а малым значениям α соответствует их избыток.
2) Согласно определению большим значениям β соответствует дефицит ТР, а малым значениям β соответствует их избыток.
3) Из (8) следует, что чем больше α, тем меньше β и наоборот. Таким образом, дефицит ОФ связан с избытком ТР и наоборот.

Замечание. Дать экономическую интерпретацию указанным в комментариях свойствам.

§3. Новое представление ПФ и экономико-математических параметров

Теорема 3. Пусть $F(K,L)$ является ЛОПФ. Пусть $f(k) = F(k,1)$. Тогда

$$y = f(k), \tag{1}$$

$$F(K,L) = Lf(k). \tag{2}$$

Доказательство. Обратимся к определению ЛОПФ:

$$F(\lambda K,\lambda L) = \lambda F(K,L). \tag{3}$$

В (3) возьмём $\lambda = \frac{1}{L}$:

$$F(\frac{1}{L}K,1) = \frac{1}{L}F(K,L). \tag{4}$$

Так как по определению $k = \dfrac{K}{L}$, то из (4) получаем $F(K,L) = LF(k,1) = Lf(k)$, т.е. приходим к (2). По определению $y = \dfrac{F(K,L)}{L}$. Таким образом, поделив (2) слева и справа на L, приходим к (1).

Теорема 4. Пусть $F(K,L)$ является ОПФ$_\gamma$. Тогда

$$y = L^{\gamma-1} f(k), \tag{5}$$

$$F(K,L) = L^{\gamma} f(k). \tag{6}$$

Замечание: Доказать самостоятельно.

Теорема 5. Пусть $F(K,L)$ является ЛОПФ. Тогда экономико-математические параметры z, v, r, α, β имеют следующее представление («штрих» означает производную по k)

$$z = f(k)/k, \tag{7}$$

$$v = f(k) - kf'(k), \tag{8}$$

$$r = f'(k), \tag{9}$$

$$\alpha = k\frac{f'(k)}{f(k)}, \tag{10}$$

$$\beta = 1 - k\frac{f'(k)}{f(k)}. \tag{11}$$

Доказательство. Непосредственно следуют очевидные преобразования:

$$z = \frac{F}{K} = \frac{Lf(k)}{K} = f(k)\frac{L}{K} = \frac{f(k)}{k} \Rightarrow (7).$$

$$v = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}[Lf(k)] = f(k) + L\frac{\partial f(k)}{\partial L} = f(k) + L\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial L} =$$

$$= f(k) + Lf'(k)\frac{\partial[K/L]}{\partial L} = f(k) - Lf'(k)\frac{K}{L^2} =$$

$$= f(k) - f'(k)k \Rightarrow (8).$$

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{F} = v\frac{L}{Lf(k)} = \frac{f(k) - kf'(k)}{f(k)} = 1 - k\frac{f'(k)}{f(k)} \Rightarrow (11).$$

Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть $F(K,L)$ является ОПФ$_\gamma$. Тогда

$$z = L^{\gamma-1}\frac{f(k)}{k}, \tag{12}$$

$$v = L^{\gamma-1}[\gamma f(k) - kf'(k)], \tag{13}$$

$$r = L^{\gamma-1} f'(k), \tag{14}$$

$$\alpha = k\frac{f'(k)}{f(k)}, \tag{15}$$

$$\beta = \gamma - k\frac{f'(k)}{f(k)}. \tag{16}$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

Неоклассические условия для f(k):

1. $f(k) \geq 0$, если $k \geq 0$, и $f(k) = 0$, только если $k = 0$;
2. $f'(k) > 0$, т.е. $f(k)$ является монотонно возрастающей функцией фондовооружённости;
3. $f''(k) < 0$, т.е. $f(k)$ является выпуклой вверх функцией фондовооружённости;
4. $\lim\limits_{k\downarrow 0} f'(k) = \infty$; $\lim\limits_{k\uparrow\infty} f'(k) = 0$.

Замечание. Дать экономическую интерпретацию условий 1–4 и привести график $f(k)$.

Теорема 7. Если у ЛОПФ хотя бы один из коэффициентов эластичности α или β не зависит от k, то такая ПФ является ПФ Кобба – Дугласа.

Замечание. Доказать самостоятельно.

§4.Эластичность замены факторов производства

В ходе экономического процесса необходимость замены факторов производства одного другим ($K\to L$; $L\to K$) возникает вследствие того, что тот или иной фактор может быть дефицитным, из-за чего появляется необходимость заменить его в процессе производства другим, более доступным.

Задача состоит в следующем. Задано основное производственное соотношение

$$Y = F(K,L). \qquad (1)$$

Предположим, что объём ТР уменьшился на величину ΔL. На какую величину ΔK нужно увеличить объём ОФ, чтобы объём выпуска Y остался неизменным? Так как Y= const, то $\Delta Y = 0$. Переходя к дифференциалам, получим из (1)

$$dY = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0. \qquad (2)$$

Определение. Предельной нормой замены S_K трудовых ресурсов основными фондами и предельной нормой замены S_L основных фондов трудовыми ресурсами называются величины

$$S_K = -\frac{dK}{dL}\ , \quad S_L = -\frac{dL}{dK}\ . \qquad (3)$$

Согласно поставленной задаче dK и dL имеют разные знаки. Поэтому

$$S_K > 0,\ S_L > 0. \qquad (4)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$S_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}\ , \quad S_L = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}\ . \qquad (5)$$

Теорема 8. Имеет место свойство

$$S_K\, S_L = 1. \qquad (6)$$

Это свойство непосредственно следует из (5).

Из (5) с учётом результатов §2 следует, что

$$S_K = v / r,\ S_L = r / v\ , \qquad (7)$$

т.е. S_K и S_L определяются отношениями предельных производительностей трудовых ресурсов v и основных фондов r.

Замечание. Дать экономическую интерпретацию формул (7).

Теорема 9. Пусть $F(K,L)$ является ЛОПФ. Тогда

$$S_K = \frac{f(k)}{f'(k)} - k \quad , \tag{8а}$$

$$S_L = \frac{f'(k)}{f(k) - kf'(k)} \quad . \tag{8б}$$

Доказательство. В §3 было доказано, что для ЛОПФ

$$F(K,L) = Lf(k)\ , \ k = K/L. \tag{9}$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}[Lf(k)] = f(k) + L\frac{\partial f(k)}{\partial L} = f(k) + L\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial L} =$$

$$= f(k) + Lf'(k)\frac{\partial(K/L)}{\partial L} = f(k) + Lf'(k)(-\frac{K}{L^2}) =$$

$$= f(k) + \frac{L}{L}f'(k)(-\frac{K}{L}) = f(k) - kf'(k); \tag{10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}[Lf(k)] = L\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial K} = Lf'(k)\frac{\partial(K/L)}{\partial K} =$$

$$= Lf'(k)\frac{1}{L} = f'(k). \tag{11}$$

Использование (10) и (11) в (5) приводит к формулам (8).

Теорема 10. Пусть $F(K,L)$ является ОПФ$_\gamma$. Тогда

$$S_K = \gamma\frac{f(k)}{f'(k)} - k \quad , \qquad S_L = \frac{f'(k)}{\gamma f(k) - kf'(k)} \quad . \tag{12}$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

Теорема 11. Для того чтобы норма замены S_K либо S_L ЛОПФ не зависела от фондовооружённости k , необходимо и достаточно, чтобы она была линейной, т.е.

$$F(K,L) = AK + BL,\ f(k) = Ak + B\ . \tag{13}$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

Аналогично тому, как при исследовании процесса производства в соответствии с основным соотношением $Y = F(K,L)$ были введены безразмерные характеристики α и β (коэффициенты эластичности по ОФ и ТР), так и при исследовании процесса замены факторов производства также могут быть введены безразмерные характеристики.

Определение. Эластичность замены трудовых ресурсов основными фондами σ_K равна количеству процентов, на которое необходимо изменить величину фондовооружённости k, чтобы величина S_K составила 1%.

Определение. Эластичность замены основных фондов трудовыми ресурсами σ_L равна количествупроцентов, на которое необходимо изменить величину фондовооружённости k, чтобы величина S_L составила 1%.

Нахождение σ_K .

Изменение $K \leftrightarrow$ изменение S_K:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{K}\% \leftrightarrow \mathrm{S_K}\% \\ 1\% \leftrightarrow \mathrm{X_K}\% \end{array}\right\} \Rightarrow X_K\% = \frac{S_K\%}{K\%} = \frac{\Delta S_K}{S_K} : \frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta S_K}{\Delta K}\frac{K}{S_K}.$$

Изменение $k \leftrightarrow$ изменение S_K:

$$\left.\begin{array}{l} 1\% \leftrightarrow \mathrm{X_K}\% \\ \sigma_K\% \leftrightarrow 1\% \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_K = \frac{1}{X_K} = \left(\frac{\Delta S_K}{\Delta K}\frac{K}{S_K}\right)^{-1}. \qquad (14)$$

Нахождение σ_L .

Изменение $L \leftrightarrow$ изменение S_L :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L}\% \leftrightarrow \mathrm{S_L}\% \\ 1\% \leftrightarrow \mathrm{X_L}\% \end{array}\right\} \Rightarrow X_L\% = \frac{S_L\%}{L\%} = \frac{\Delta S_L}{S_L} : \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta S_L}{\Delta L}\frac{L}{S_L}.$$

Изменение $k \leftrightarrow$ изменение S_L :

$$\left.\begin{array}{l} 1\% \leftrightarrow \mathrm{X_L}\% \\ \sigma_L\ \% \leftrightarrow 1\% \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_L = \frac{1}{X_L} = \left(\frac{\Delta S_L}{\Delta L}\frac{L}{S_L}\right)^{-1}. \qquad (15)$$

Теорема 12. Для σ_K и σ_L имеют место следующие формулы:

$$\sigma_K = \left(\frac{dS_K}{dk} \frac{k}{S_K} \right)^{-1}, \tag{16а}$$

$$\sigma_L = \left(-\frac{dS_L}{dk} \frac{k}{S_L} \right)^{-1}. \tag{16б}$$

Доказательство. Переходя к пределу в (14) при $\Delta K \to 0$, получим

$$\left(\frac{dS_K}{dK} \frac{K}{S_K} \right) = \frac{dS_K}{dk} \frac{dk}{dK} \frac{K}{S_K} = \frac{dS_K}{dk} \frac{d(K/L)}{dK} \frac{K}{S_K} =$$

$$= \frac{dS_K}{dk} \frac{1}{L} \frac{K}{S_K} = \frac{dS_K}{dk} \frac{K}{L} \frac{1}{S_K} = \frac{dS_K}{dk} \frac{k}{S_{K\;1}}$$

Отсюда

$$\sigma_K = \left(\frac{dS_K}{dK} \frac{K}{S_K} \right)^{-1}. \tag{17}$$

Отсюда на основании (17) следует (16а). Переходя к пределу в (14) при $\Delta L \to 0$, получим

$$\sigma_L = \left(\frac{dS_L}{dL} \frac{L}{S_L} \right)^{-1}. \tag{18}$$

Отсюда

$$\left(\frac{dS_L}{dL} \frac{L}{S_L} \right) = \frac{dS_L}{dk} \frac{dk}{dL} \frac{L}{S_L} = \frac{dS_L}{dk} \frac{d(K/L)}{dL} \frac{L}{S_L} =$$

$$= \frac{dS_L}{dk} \left(-\frac{K}{L^2} \right) \frac{L}{S_L} = -\frac{dS_L}{dk} \frac{K}{L} \frac{1}{S_L} = -\frac{dS_L}{dk} \frac{k}{S_L}.$$

Отсюда на основании (18) следует (16б).

Следствие. Для σ_L вида (16б) справедливо эквивалентное представление

$$\sigma_L = \left(\frac{dS_L}{dk^{-1}} \frac{k^{-1}}{S_L} \right)^{-1}. \tag{19}$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

Теорема 13. Для ЛОПФ эластичности замены факторов производства равны между собой, т.е. $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$ и определяются формулой

$$\sigma = \frac{f'(k)[kf'(k) - f(k)]}{kf(k)f''(k)}. \tag{20}$$

Доказательство. Согласно (8а)

$$\frac{k}{S_K} = \frac{kf'(k)}{f - kf'(k)}. \tag{21}$$

Тогда

$$\frac{dS_K}{dk} = \frac{d}{dk}\left[\frac{f - kf'}{f'}\right] = \frac{f' - f' - kf''}{f'} - \frac{(f - kf')f'}{(f')^2} =$$

$$= \frac{-kff'' - ff'' + kff''}{(f')^2} = -\frac{ff''}{(f')^2}. \tag{22}$$

Используем (21), (22) в (16а):

$$\sigma_K = \left[\frac{ff''kf'(k)}{(f')^2(kf' - f)}\right]^{-1} = \frac{f'(kf' - f)}{kff''} \quad \Rightarrow (20).$$

Согласно (8б)

$$\frac{k}{S_L} = \frac{k(f - kf')}{f'}. \tag{23}$$

Тогда

$$\frac{dS_L}{dk} = \frac{d}{dk}\left[\frac{f'}{f - kf'}\right] = \frac{f''}{f - kf'} - \frac{(f' - f' - kf'')f'}{(f - kf')^2} =$$

$$= \frac{f''(f - kf') + kff''}{(f - kf')^2} = \frac{ff'' - kff'' + kff''}{(f - kf')^2} = \frac{ff''}{(f - kf')^2}. \tag{24}$$

Используем (23), (24), в (16б):

$$\sigma_L = \left[-\frac{ff''}{(f-kf')^2} \frac{k(f-kf')}{f'} \right]^{-1} = \frac{f'(kf'-f)}{kff''} \Rightarrow (20).$$

Теорема 14. Для ОПФ$_\gamma$ эластичности замены факторов производства равны между собой, т.е. $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$ и определены формулой

$$\sigma = \frac{f'(k)[\gamma f(k) - kf'(k)]}{k[(\gamma-1)(f'(k))^2 - \gamma f(k) f''(k)]} . \qquad (25)$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

Теорема 15. Для ПФ КД $\sigma = 1$.

Замечание. Доказать самостоятельно.

§5. CES-производственные функции

Однородные ПФ в зависимости от того, переменной или постоянной относительно фондовооружённости k является эластичность замены σ, подразделяются на два типа:

1. VES-ПФ(Variable Elastisity of Substitutiion) – переменная эластичность замены;
2. CES-ПФ(Constant Elastisity of Substitutiion) постоянная эластичность замены.

Оказывается, что для CES-ПФ можно получить явный функциональный вид.

Теорема 16. Для CES-ПФ справедливы два эквивалентных представления

$$F(K,L) = A[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}}, \qquad (1)$$

$$f(k) = A[\delta k^{-\rho} + (1-\delta)]^{-\frac{\gamma}{\rho}}, \qquad (2)$$

где

$$A > 0,\ 0 < \delta < 1, \rho > -1,\ \rho \neq 0,\ \rho \neq \infty,\ 0 < \gamma < 1. \qquad (3)$$

Доказательство. Из предыдущего параграфа следует

$$\sigma = \left(\frac{dS}{dk}\frac{k}{S}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Отсюда получаем для предельной нормы замены S дифференциальное уравнение

$$\frac{dS}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{dk}{k}. \tag{5}$$

Так как по предположению $\sigma = \text{const}$, то общее решение дифференциального уравнения (5) имеет вид:

$$\ln S = \frac{1}{\sigma}\ln k + \ln C,$$

$$S(k) = Ck^{\frac{1}{\delta}},\ \ C > 0. \tag{6}$$

Условие на константу интегрирования $C > 0$ следует из того, что $S > 0$. Из предыдущего параграфа следует

$$S(k) = \gamma\frac{f(k)}{f'(k)} - k. \tag{7}$$

Отсюда

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\gamma}{k + S(k)}. \tag{8}$$

Подстановка (6) в (8) приводит к дифференциальному уравнению для искомой ПФ $f(k)$

$$\frac{df}{f} = \gamma\frac{dk}{k + Ck^{\frac{1}{\sigma}}}. \tag{9}$$

Отсюда

$$\ln f(k) = \gamma\int\frac{dk}{k + Ck^{\frac{1}{\sigma}}} + \ln C_1. \tag{10}$$

Для вычисления интеграла в (10) сделаем замену переменных

$$k = t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},\ \ dk = \frac{\sigma}{(\sigma-1)}t^{\frac{1}{\sigma-1}}dt,\quad k^{\frac{1}{\sigma}} = t^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

Тогда

$$\int \frac{dk}{k + Ck^{\frac{1}{\sigma}}} = \int \frac{\frac{\sigma}{(\sigma-1)} t^{\frac{1}{\sigma-1}} dt}{t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + Ct^{\frac{1}{\sigma-1}}} = \frac{\sigma}{(\sigma-1)} \int \frac{t^{\frac{1}{\sigma-1}} dt}{t^{\frac{1}{\sigma-1}}(t+C)} =$$

$$= \frac{\sigma}{(\sigma-1)} \int \frac{d(t+C)}{(t+C)} = \frac{\sigma}{(\sigma-1)} \ln(t+C) =$$

$$= \frac{\sigma}{(\sigma-1)} \ln(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C). \qquad (11)$$

Подстановка (11) в (10) даёт

$$f(k) = C_1 \left[k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C \right]^{\gamma \frac{\sigma}{\sigma-1}}, \; C_1 > 0. \qquad (12)$$

Условие на константу интегрирования $C_1 > 0$ следует из того, что $f > 0$.

Введём новые параметры A, δ, ρ следующими соотношениями

$$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}, \; C = \frac{1-\delta}{\delta}, \; C_1 = A\delta^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \qquad (13)$$

Использование (13) в (12) даёт

$$f(k) = A\delta^{-\frac{\gamma}{\rho}} \left[k^{-\rho} + \frac{1-\delta}{\delta} \right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A\delta^{-\frac{\gamma}{\rho}} \left[\delta^{-1}(\delta k^{-\rho} + (1-\delta)) \right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A\delta^{-\frac{\gamma}{\rho}} \delta^{\frac{\gamma}{\rho}} \left[\delta k^{-\rho} + (1-\delta) \right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} = A \left[\delta k^{-\rho} + (1-\delta) \right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} \Rightarrow (2).$$

Так как между $f(k)$ и $F(K,L)$ имеет место формула связи $F(K,L) = L^{\gamma} f(k),\; k = \frac{K}{L}$, то из (2) следует

$$F(K,L) = AL^{\gamma}\left[\delta\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho} + (1-\delta)\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A\left[L^{-\rho}(\delta\frac{K^{-\rho}}{L^{-\rho}} + (1-\delta))\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} \Rightarrow (1).$$

Условия (3) на параметры следуют из того, что $C > 0$, $C_1 > 0$, $\sigma > 0$. При этом при $\rho = 0$ и $\rho = \infty$ происходит вырождение ПФ в константу, а при $\gamma > 1$ – нарушение НКУ.

Теорема 17. CES-ПФ является однородной со степенью однородности γ.

Доказательство. По определению ОПФγ

$$F(\lambda K,\lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K,L). \tag{14}$$

Тогда из (1) следует

$$F(\lambda K,\lambda L) = A\left[\delta(\lambda K)^{-\rho} + (1-\delta)(\lambda L)^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A\left[\lambda^{-\rho}(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}} = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}}\lambda^{\gamma} =$$

$$= \lambda^{\gamma} F(K,L) \Rightarrow (14).$$

Теорема 18. Коэффициенты эластичности по фондам α и трудовым ресурсам β для CES-ПФ определяются формулами

$$\alpha(k) = \frac{\gamma}{\left[1 + \frac{(1-\delta)}{\delta}k^{\rho}\right]}, \tag{15а}$$

$$\beta(k) = \frac{\gamma \dfrac{(1-\delta)}{\delta} k^{\rho}}{\left[1 + \dfrac{(1-\delta)}{\delta} k^{\rho}\right]}. \tag{15б}$$

Доказательство. Согласно §3

$$\alpha = k \frac{f'(k)}{f(k)}. \tag{16}$$

Проводим вычисления:

$$f'(k) = \frac{df}{dk} = A\left(-\frac{\gamma}{\rho}\right)\left[\delta k^{-\rho} + (1-\delta)\right]^{-\frac{(\gamma+\rho)}{\rho}} \delta(-\rho) k^{-\rho-1} =$$

$$= A \frac{\gamma\delta\rho}{\rho} k^{-\rho-1} [\cdot]^{-\frac{\gamma}{\rho}} [\cdot]^{-1} = A[\cdot]^{-\frac{\gamma}{\rho}} \gamma\delta k^{-\rho-1} [\cdot]^{-1} =$$

$$= f(k)\gamma\delta k^{-\rho-1}[\cdot]^{-1}. \tag{17}$$

Подстановка (17) в (16) даёт

$$\alpha = \frac{k k^{-\rho-1}\gamma\delta f(k)}{f(k)\left[\delta k^{-\rho} + (1-\delta)\right]} = \frac{\gamma\delta k^{-\rho}}{\delta k^{-\rho} + (1-\delta)} = \frac{\gamma}{\dfrac{\delta k^{-\rho}}{\delta k^{-\rho}} + \dfrac{(1-\delta)}{\delta k^{-\rho}}} =$$

$$= \frac{\gamma}{1 + \dfrac{(1-\delta)}{\delta} k^{\rho}} \Rightarrow (15\text{а}).$$

Из §2 следует $\alpha + \beta = \gamma$. Тогда

$$\beta = \gamma - \alpha = \gamma - \frac{\gamma}{1 + \dfrac{(1-\gamma)}{\delta} k^{-\rho}} = \frac{\gamma + \gamma \dfrac{(1-\delta)}{\delta} k^{\rho} - \gamma}{1 + \dfrac{(1-\delta)}{\delta} k^{\rho}} =$$

$$= \frac{\gamma \dfrac{(1-\delta)}{\delta} k^{\rho}}{1 + \dfrac{(1-\delta)}{\delta} k^{\rho}} \Rightarrow (15\text{б}).$$

Теорема 19. Для $\rho > 1$ коэффициент эластичности $\alpha(k)$ CES-ПФ является монотонно убывающей функцией с точкой перегиба

$$\bar{k} = \left[\frac{\delta}{(1-\delta)}\frac{(\rho-1)}{(\rho+1)}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \ \alpha(\bar{k}) = \frac{\gamma(1+\rho)}{2\rho}. \qquad (18)$$

При этом

$$\lim_{k\downarrow 0}\alpha(k) = \gamma, \ \lim_{k\uparrow\infty}\alpha(k) = 0. \qquad (19)$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

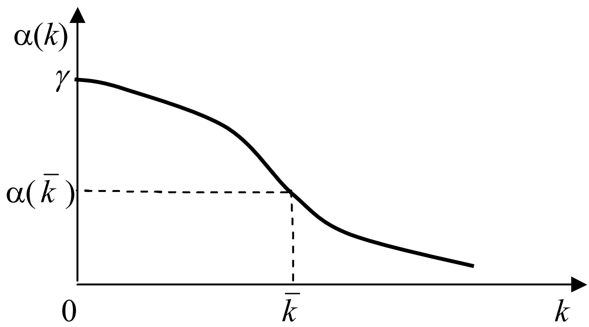

Рис. 1

Вывод. Поскольку большим значениям $\alpha(k)$ соответствует дефицит ОФ *K* (соответственно избыток ТР *L*), а малым значениям $\alpha(k)$ соответствует избыток ОФ *K* (соответственно дефицит ТР *L*), то при производственном процессе в соответствии с CES-ПФ вся область $k \in [0, \infty)$ фондовооружённости может быть разбита на две области (рис. 1):

– $[0; \bar{k})$– область дефицита ОФ *K*(избытка ТР *L*);

– $[\bar{k}; \infty)$– область дефицита ТР *L* (избыток ОФ *K*).

§6 Конструирование производственных функций

Конкретному производственному процессу с конкретными свойствами соответствует свой вид производственной функции. Встаёт вопрос о конструировании производственной функции, соответствующей производственному процессу с определёнными свойствами. В предыдущих параграфах были получены результаты, отвечающие на некоторые подобные вопросы.

1. Если у ЛОПФ хотя бы один из коэффициентов эластичности α или β не зависит от k, то такая ПФ является ПФ КД (Теорема 7).
2. Если предельные нормы замены S_K или S_L не зависят от k в случае ЛОПФ, то такая ПФ является линейной (теорема 11).
3. Если эластичности замены σ_K или σ_L не зависят от k, то такая ПФ является CES-ПФ (Теорема 19).
4. Если коэффициент эластичности α является монотонно убывающей функцией k с точкой перегиба $\bar{k}$, разделяющей всю область $k \in [0, \infty)$ на подобласти дефицита и избытка факторов производства, то в этом случае ПФ является CES-ПФ (теорема 19).

В данном параграфе будет получен ряд результатов, отвечающих на другие вопросы.

Теорема 20. Пусть $F_i(K,L) = A_i K^{\alpha_i} L^{\beta_i}$,

где $A_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $\alpha_i + \beta_i = 1$, $i = \overline{1;N}$, являются ПФ КД. Тогда ПФ

$$F(K,L) = \prod_{i=1}^{N} F_i(K,L) = AK^{\alpha} L^{\beta}, \tag{2}$$

$$A = \prod_{i=1}^{N} A_i, \quad \alpha = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \tag{3}$$

является ОПФ$_\gamma$ со степенью однородности $\gamma = N$.

Теорема 21. Пусть $F_j(K,L)$ для $j=\overline{1;M}$ являются CES-ПФ, т.е.

$$F_j(K,L) = B_j\left[\delta_j K^{-\rho_j} + (1-\delta_j)L^{-\rho_j}\right]^{-\frac{\gamma_j}{\rho_j}}. \qquad (4)$$

Тогда ПФ вида

$$F(K,L) = \prod_{j=1}^{M} F_j(K,L) \qquad (5)$$

является ОПФ$_\gamma$ со степенью однородности

$$\gamma = \sum_{j=1}^{M} \gamma_j. \qquad (6)$$

Теорема 22. Пусть $F_i(K,L)$ для $i=\overline{1;N}$ является ПФ КД вида (1). Пусть $F_i(K,L)$ для $i=\overline{1;M}$ являются CES-ПФ вида (5). Тогда ПФ вида

$$F(K,L) = \prod_{i=1}^{N} F_i(K,L) \prod_{j=1}^{M} F_j(K,L) \qquad (7)$$

является ОПФ$_\gamma$ со степенью однородности

$$\gamma = N + \sum_{i=1}^{M} \gamma_j \qquad (8)$$

Замечание. Доказать теоремы 20, 21, 22 самостоятельно.

Теорема 23. Если ПФ $F(K,L)$ имеет коэффициент эластичности по фондам $\alpha(k)$ вида

$$\alpha(k) = \alpha_1(k) + \alpha_2(k) + \alpha_0, \qquad (9)$$

где α_0–коэффициент эластичности по фондам ПФ КД $F_0(K,L)$, а $\alpha_1(k)$ и $\alpha_2(k)$ – коэффициенты эластичности по фондам CES-ПФ $F_1(K,L)$ и $F_2(K,L)$ с параметрами соответственно $\{\delta_1, \rho_1, \gamma_1\}$ и $\{\delta_2, \rho_2, \gamma_2\}$, то такая ПФ имеет вид

$$F(K,L) = F_0(K,L)F_1(K,L)F_2(K,L) \qquad (10)$$

и является ОПФ$_\gamma$ со степенью однородности

$$\gamma = 1 + \gamma_1 + \gamma_2. \qquad (11)$$

Доказательство. Так как. F_0 является ЛОПФ, а F_1 и F_2 являются ОПФ$_\gamma$ со степенями γ_1 и γ_2, то

$$F_0(K,L) = L f_0(k),\ F_1(K,L) = L^{\gamma_1} f_1(k),$$

$$F_2(K,L) = L^{\gamma_2} f_2(k). \qquad (12)$$

Согласно теореме 6

$$\alpha(k) = k\frac{f'(k)}{f(k)},\ \alpha_1(k) = k\frac{f_1'(k)}{f_1(k)},\ \alpha_2(k) = k\frac{f_2'(k)}{f_2(k)}, \qquad (13)$$

где $f(k)$ соответствует $F(K,L)$. Из (13) следует

$$\frac{df}{f} = \frac{\alpha(k)}{k}dk,\ \frac{df_1}{f_1} = \frac{\alpha_1(k)}{k}dk,\quad \frac{df_2}{f_2} = \frac{\alpha_2(k)}{k}dk. \qquad (14)$$

Тогда, с учётом (9) и (14)

$$\int\frac{df}{f} = \int\frac{\alpha(k)}{k}dk = \int\frac{\alpha_1(k)}{k}dk + \int\frac{\alpha_2(k)}{k}dk + \int\frac{\alpha_0}{k}dk =$$

$$\int\frac{df_1}{f_1} + \int\frac{df_2}{f_2} + \alpha_0 \ln k + \ln C_0. \qquad (15)$$

Интегрирование в (15) даёт

$$\ln f(k) + \ln C =$$

$$= \ln f_1(k) + \ln C_1 + \ln f_2(k) + \ln C_2 + \ln k^{\alpha_0} + \ln C_0.$$

Отсюда

$$f(k) = \left(\frac{C_0C_1C_2}{C}\right)k^{\alpha_0} f_1(k) f_2(k) = Ak^{\alpha_0} f_1(k) f_2(k).$$

Так как $f_0(k) = Ak^{\alpha_0}$ – ПФ КД, то соотношение

$$f(k) = f_0(k) f_1(k) f_2(k) \qquad (16)$$

есть соотношение (10), записанное для f, f_0, f_1, f_2. Свойство (11) следует из теоремы 22.

Теорема 24. Для $\rho_1 > 1$, $\rho_2 > 1$ коэффициент эластичности $\alpha(k)$ вида (9) ПФ вида (10) (или (16)) является монотонно убывающей функцией с двумя точками перегиба $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$. При этом

$$\lim_{k \downarrow 0} \alpha(k) = \alpha_0 + \gamma_1 + \gamma_2;\ \lim_{k \uparrow \infty} = \alpha_0. \qquad (17)$$

Данный результат следует непосредственно из теоремы 19. С учётом рис. 1 и теоремы 19 график $\alpha(k)$ имеет вид,приведённый на рис. 2.

Таким образом, при производственном процессе, соответствующем ПФ вида (10) или (16) вся область $k \in [0, \infty)$ значений фондовооружённости разбивается на три области:

1. $[0, \bar{k}_1)$ – область дефицита фактора K (избыток фактора L);
2. $[\bar{k}_2, \infty)$ – область дефицита фактора L (избыток фактора K);
3. $[\bar{k}_1, \bar{k}_2]$ – область сбалансированности факторов производства L и K.

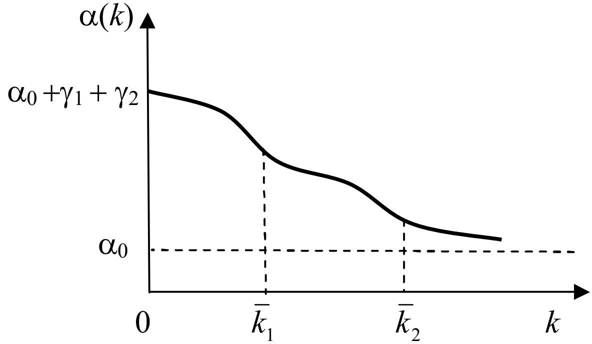

Рис. 2

Подобная ситуация типична: в процессе функционирования экономики производственный сектор переходит то в одну, то в другую область.

§7. Изокванты

Производственная функция $F(K,L)$ обладает тем свойством, что одно и то же количество валового продукта $Y=Y_c=\text{const}$, т.е.

$$Y_c = F(K,L), \tag{1}$$

может быть произведено при различных сочетаниях факторов производства K и L.

Определение. Изоквантой называется геометрическое место точек плоскости $\{K,L\}$, для которых выполняется соотношение (1).

Разрешая (1) относительно K, получаем уравнения для семейства по Y_c кривых

$$K = \Psi(L,Y_c),\ L = \Phi(K,Y_c). \tag{2}$$

При фиксированном Y_c кривая (2) и будет изоквантой. При различных значениях $Y_c^1, Y_c^2 \ldots Y_c^N$ получаем семейство изоквант. Соотношение (1) определяет зависимость K от L при фиксированном Y_c в неявном виде. Если (1) может быть преобразовано к виду (2), то соотношение (2) определяет эту зависимость в явном виде.

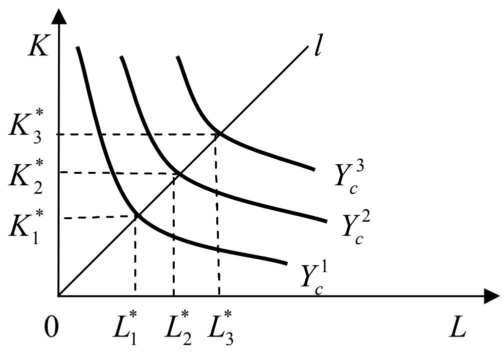

Рис. 3

Проведём из начала координат (рис. 3) луч l, который пересекает изокванты, соответственно, в точках (K_1^*, L_1^*), (K_2^*, L_2^*), (K_3^*, L_3^*).

Поскольку

$$K_3^* > K_2^* > K_1^*,\ L_3^* > L_2^* > L_1^*\ , \tag{3}$$

то из соотношения

$$Y = F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\gamma F(K, L) \tag{4}$$

для ОПФ следует, что

$$Y_c^3 > Y_c^2 > Y_c^1\ . \tag{5}$$

Таким образом, изокванта (1) разделяет всю плоскость $\{K,L\}$, $K \geq 0$, $L \geq 0$ на две области, в одной из которых $F(K,L) = Y < Y_c$, а в другой $F(K,L) = Y > Y_c$.

Для производственной функции Кобба–Дугласа соотношение (2) имеет вид

$$K = \left[\frac{Y_c}{AL^\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{Y_c}{AL^{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{6}$$

Из (6) следует, что для любой изокванты $Y = Y_c$

$$\lim_{L\uparrow\infty} K = 0,\ \lim_{L\downarrow 0} K = \infty, \tag{7}$$

т.е. асимптотами изоквант являются оси координат.

Вывод. Для ПФ Кобба–Дугласа любое количество продукта Y_c может быть произведено при сколь угодно малом количестве одного из факторов производства, если другой фактор производства имеется в достаточном количестве.

Для CES-производственной функции (см.(5.1)) соотношение (2) имеет вид

$$K = \left\{\frac{1}{\delta}\left[\left(\frac{Y_c}{A}\right)^{-\frac{\rho}{\gamma}} - (1-\delta)L^{-\rho}\right]\right\}^{-\frac{1}{\rho}}. \tag{8}$$

Если (5.1) разрешить относительно L, то получим

$$L = \left\{ \frac{1}{1-\delta} \left[\left(\frac{Y_c}{A} \right)^{-\frac{\rho}{\gamma}} - \delta K^{-\rho} \right] \right\}^{-\frac{1}{\rho}}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует

$$\lim_{L \uparrow \infty} K = K_\infty = \delta^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{Y_c}{A} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\lim_{K \uparrow \infty} L = L_\infty = (1-\delta)^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{Y_c}{A} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (10)$$

т.е. изокванты имеют асимптотами прямые $K = K_\infty$ и $L = L_\infty$ (рис. 4).

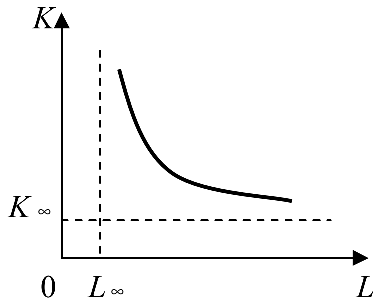

Рис 4

Вывод. Для CES-ПФ, в отличие от ПФ Кобба – Дугласа, в случае ограниченности одного из факторов производства нельзя достигнуть любого заданного количества Y_c валового продукта за счёт неограниченного увеличения другого фактора. Это свойство позволяет избежать противоречия, связанного с неограниченно большими возможностями замены одного фактора производства другим.

Замечание. Получить (6)–(9) самостоятельно.

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $F(K,L)$ является ПФ КД, т.е.

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}\ , \tag{1}$$

$$A > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

Проверить, что ПФ вида (1) удовлетворяет НКУ.
Показать, что ПФ вида (1) является ЛОПФ, т.е. $\gamma = 1$.

2. Пусть $F(K,L)$ является ОПФ$_{\gamma}$. Доказать свойство

$$\alpha + \beta = \gamma\ , \tag{2}$$

где α и β – коэффициенты эластичности.

3. Пусть $F(K,L)$ является ЛОПФ. Доказать свойства

$$y > v,\ z > r. \tag{3}$$

4. Пусть $F(K,L)$ является ЛОПФ. Получить функциональные зависимости

$$\alpha = \varphi\ (\ r,z),\ \beta = \psi\ (\ v,y\ ), \tag{4}$$

$$y = \chi\ (k,r,v),\ z = \theta\ (\ k,r,v\ ), \tag{5}$$

$$\alpha = (r\ /\ z);\ \beta = v\ /y;\ y = r\ k + v;\ z = (\ v\ /\ k) + r. \tag{6}$$

5. Пусть $F(K,L)$ является ПФ КД (см. (1)). Показать, что параметры α и β в представлении функции являются соответственно коэффициентами эластичности по фондам и трудовым ресурсам. Найти z, v, r.
Показать, что

$$y = Ak^{\alpha}\ ;\ v = \beta y;\ r = \alpha z. \tag{7}$$

Убедиться в справедливости свойств (3), (6).
Найти экономико–математические параметры на основе представления $f(k) = A\ k^{\alpha}$ и показать, что полученные формулы совпадают с найденными выражениями на основе $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$.

6. Пусть $F(K,L)$ является ОПФ$_{\gamma}$. Показать, что

$$y = L^{\gamma-1}f(k), \tag{8}$$

$$F(K,L)= L^{\gamma} f(k). \tag{9}$$

7. Пусть $F(K,L)$ является ОПФ$_{\gamma}$. Показать, что

$$z = L^{\gamma-1}\frac{f(k)}{k}, \tag{10}$$

$$v = L^{\gamma-1}[\gamma f(k) - kf'(k)], \tag{11}$$

$$r = L^{\gamma-1}f'(k), \tag{12}$$

$$\alpha = k\frac{f'(k)}{f(k)}, \tag{13}$$

$$\beta = \gamma - k\frac{f'(k)}{f(k)}. \tag{14}$$

8. Доказать, что если у ЛОПФ хотя бы один из коэффициентов α или β не зависит от k, то такая ПФ является ПФ КД.

9. Доказать, что если ПФ $F(K,L)$ является ОПФ$_\gamma$, то для предельных норм замены S_K и S_L справедливы формулы

$$S_K = \gamma\frac{f(k)}{f'(k)} - k, \quad S_L = \frac{f'(k)}{\gamma f(k) - kf'(k)}. \tag{15}$$

10. Доказать, что для того, чтобы норма замены S_K или S_L ЛОПФ не зависела от k, необходимо и достаточно, чтобы она была линейной, т.е.

$$F(K,L) = AK + BL, f(k) = Ak + B. \tag{16}$$

11. Показать, что для ПФ КД

$$S_K = \frac{\beta}{\alpha}k, \qquad S_L = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{k}, \tag{17}$$

воспользовавшись определением S_K и S_L через $F(K,L)$ и через $f(k)$. Дать экономическую интерпретацию формулам (17).

12. Показать, что для эластичности замены σ_L справедлива формула

$$\sigma_L = \left(\frac{dS_L}{dk^{-1}}\frac{k^{-1}}{S_L}\right)^{-1}. \tag{18}$$

13. Показать, что для ОПФ$_\gamma$

$$\sigma_K = \sigma_L = \sigma = \frac{f'(k)\left[\gamma f(k) - kf'(k)\right]}{k\left[(\gamma - 1)(f'(k)^2 - \gamma f(k) f''(k)\right]}. \quad (19)$$

14. Показать, что для ПФ КД $\sigma = 1$.

15. Показать, что CES-ПФ сохраняет свой вид и в случае, если для её вывода воспользоваться формулами

$$\sigma = \left(-\frac{dS}{dk}\frac{k}{S}\right)^{-1}, \; S(k) = \frac{f'(k)}{\gamma f(k) - kf'(k)}. \quad (20)$$

16. Для CES–ПФ найти α и β по формулам

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{F}, \; \beta = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{F}. \quad (21)$$

17. Показать, что $\alpha(k)$ для CES-ПФ при $\rho > 1$ является монотонно убывающей функцией от $k(0) = \gamma$ до $k(\infty) = 0$ с точкой перегиба

$$\bar{k} = \left[\frac{\delta}{(1-\delta)}\frac{(\rho - 1)}{(\rho + 1)}\right]^{\frac{1}{\rho}}. \quad (22)$$

Найти $\alpha(\bar{k}), \beta(\bar{k})$.

18. Показать, что если $F_i(K,L)$ являются для $i = \overline{1:N}$ ПФ КД, а $F_j(K,L)$ для $j = \overline{1:M}$ являются CES-ПФ, то ПФ вида $F(K,L) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M} F_i(K,L) F_j(K,L)$ является ОПФ$_\gamma$ со степенью однородности

$$\gamma = N + \sum_{j=1}^{M}\gamma_j. \quad (23)$$

19. Найти выражения для изоквант

$$K = \Psi(L, Y_c), \; L = \Phi(K, Y_c) \quad (24)$$

и для асимптот в случае ПФ КД и CES-ПФ.

Глава 2. Экономическое развитие как научно-технический прогресс

§1. Основные определения

В 1-ой главе с использованием понятия производственной функции $F(K,L)$ рассматривались закономерности, связывающие объём произведённого ВВП Y и факторы производства K (основные фонды, капитал) и L (трудовые ресурсы) в статической модели $Y = F(K,L)$, когда отсутствовала зависимость от времени t. Таким образом, изучались закономерности либо в фиксированный момент времени, либо в ситуации, когда экономика находится в стационарном состоянии и содержание экономического процесса не зависит от времени.

В данной главе переходим к динамической модели

$$Y(t) = F(K(t),L(t),t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

когда ОФ, ТР и ВВП являются изменяющимися во времени величинами. ПФ вида $F(K(t),L(t),t)$ называется динамической производственной функцией (ДПР).

Замечание. Все основные свойства для статической ПФ сохраняются и для динамической ПФ. Напомним некоторые.

1. Если для $\lambda > 0, \gamma > 0$,

$$F(\lambda K(t),\lambda L(t),t) = \lambda^{\gamma} F(K(t),L(t),t), \tag{2}$$

то такая ДПФ называется однородной ДПФ со степенью однородности γ (ОДПФ$_\gamma$). Если $\gamma = 1$, то такая ДПФ называется линейно-однородной ДПФ (ЛОДПФ).

2. Если

$$k(t) = K(t)\,/L(t), F(k(t),1,t) = f(k(t),t),$$
$$y(t) = F(K(t),L(t),t)\,/L(t), \tag{3}$$

то

$$F(K(t),L(t),t) = L^{\gamma}(t)\, f(k(t),t), \tag{4}$$

$$Y(t) = L^{\gamma-1}(t)\, f(k(t),t). \qquad (5)$$

3. Все неоклассические условия для ДПФ переписываются аналогично соответствующим условиям для статической ПФ, но только при фиксированном t. Например,

$$\left.\frac{\partial F(K,L(t),t)}{\partial K}\right|_{K=K(t)} = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial K(t)} > 0,$$

$$\left.\frac{\partial F(K(t),L,t)}{\partial L}\right|_{L=L(t)} = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L(t)} > 0, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial f(k,t)}{\partial k}\right|_{k=k(t)} = \frac{\partial f(k(t))}{\partial k(t)} = \left. f'_k(k,t)\right|_{k=k(t)} > 0.$$

Замечания:

1. Условия типа (6) далее будем записывать в виде

$$\frac{\partial F(K(t),L(t),t)}{\partial K(t)} > 0, \frac{\partial F(K(t),L(t),t)}{\partial L(t)} > 0, f'_k(k(t),t) > 0, (7)$$

подразумевая при этом строгую запись этих условий в виде (6).

2. В целях упрощения термин «динамическая» далее будем подразумевать, употребляя только в тех случаях, когда из контекста не ясно, что речь идёт именно о динамическом случае.

Примеры ДПФ:

1) $F(K(t),L(t),t) = A(t)F_0(K,L);$ (8)

2) $F(K(t),L(t),t) = F_0(K,A(t)L);$ (9)

3) $F(K(t),L(t),t) = F_0(A(t)K,L).$ (10)

При этом функция $A(t)$, удовлетворяющая условиям

$$A(t) > 0,\ \dot{A}(t) = \frac{dA(t)}{dt} > 0, \qquad (11)$$

называется *мультипликатором* НТП.

В следующем параграфе будет показано, что каждой из ДПФ вида (8) –(10) соответствует свой тип НТП.

Определение. Под НТП будем понимать монотонное возрастание $F(\cdot)$ по параметру t, т.е. условием НТП является условие

$$\frac{dF(K(t),L(t),t)}{dt} > 0. \qquad (12)$$

При этом производительность труда и капитала фиксируются на базовом уровне, а технический прогресс выступает как остаток после вычитания из общего прироста выпуска долей труда и капитала. Технический прогресс можно представить в виде условного увеличения используемых количеств труда и капитала

$$Y(t) = F(A(t)K(t),B(t)L(t)). \qquad (13)$$

Предположим, что $A(t)$ и $B(t)$ растут с постоянными темпами $\lambda_K > 0$ и $\lambda_L > 0$. Тогда

$$Y(t) = F((1 + \lambda_K)^t K(t), (1 + \lambda_L)^t L(t)). \qquad (14)$$

Тогда с учётом того, что $(1 + x)^t \approx e^{xt}$,

$$Y(t) = F(e^{\lambda_K t} K(t), e^{\lambda_L t} L(t)), \qquad (15)$$

где $e^{\lambda_K t} K(t), e^{\lambda_L t} L(t)$ представляют используемые объёмы труда и капитала, измеренные не в реальных, а в условных «эффективных» единицах, которые показывают, сколько реальных единиц труда и капитала, обладающих «базовой» производительностью, пришлось бы затратить на производство $Y(t)$ продукции при отсутствии технического прогресса.

Определение. Экзогенным называется такой НТП, в котором технологические изменения не обусловливаются моделью ДПФ, а лишь учитываются ею. В противном случае НТП называется эндогенным.

С точки зрения сделанного определения ДПФ вида (8) определяет эндогенный НТП, а вида (9), (10) – экзогенный.

Очевидно, что НТП приводит к изменению во времени экономико-математических параметров (ЭМП), которые определены в главе 1, и которые характеризуют экономический процесс: y, k, z, v, r, α, β, $S=\{S_K;S_L\}$, $\sigma=\{\sigma_K;\sigma_L\}$. Поскольку НТП действует на несколько, если не на все указанные ЭМП, то основой для классификации типов НТП является сохранение во времени определенных зависимостей между ЭМП.

Определение. НТП называется Ф-нейтральным, если для некоторой функции $\Phi(\cdot)$независимо от времени t выполняется соотношение

$$\Phi(y,k,z,v,r,\alpha,\beta,S,\sigma) = 0. \qquad (16)$$

При этом предполагается, что все параметры либо часть из них могут зависеть от времени t.

Вывод Ф-нейтральность НТП означает, что независимо от того, являются или нет функциями времени ЭМП, функциональная связь между ними сохраняется независимо от времени.

§2 Типы НТП

Формы проявления НТП лежат в основе его классификации по видам. Основными частными видами Ф-нейтральных НТП являются:

1) нейтральные по Хиксу ;
2) нейтральные по Харроду;
3) нейтральные по Солоу.

Дадим определение каждому из трёх типов НТП и найдём ДПФ, которые им соответствуют, предполагая, что ДПФ являются линейно-однородными ($\gamma = 1$).

Определение. НТП называется нейтральным по Хиксу, если предельная норма замены S является некоторой функцией фондовооружённости k, которая не зависит от времени t, т.е.

$$S = \varphi(k). \qquad (1)$$

Теорема 1 . ДПФ в случае нейтрального по Хиксу НТП имеет вид

$$F(K(t),L(t),t) = A(t)F_0(K,L), \tag{2}$$
т.е. является ДПФ типа а) (см.(9), §1).

Доказательство. Согласно главе 1
$$S = \frac{f(k,t)}{f'(k,t)} - k. \tag{3}$$
Подставляя (1) в (3), получаем для $f(k,t)$ дифференциальное уравнение по переменной k с параметром t вида
$$\frac{f(k,t)}{f'(k,t)} - k = \varphi(k). \tag{4}$$
Пусть $f_0(k)$ – некоторое частное решение уравнения (4), т.е. $f_0(k)$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{f_0(k)}{f_0'(k)} - k = \varphi(k). \tag{5}$$
Тогда общее решение $f(k,t)$ уравнения (4) должно содержать произвольную константу (относительно переменной k) $A(t)$, которая зависит от параметра t. Покажем, что общее решение $f(k,t)$ имеет вид
$$f(k,t) = A(t)\, f_0(k). \tag{6}$$
Проверим справедливость (6) подстановкой в (4), в результате которой должно получиться тождество. Эта подстановка даёт
$$\frac{A(t) f_0(k)}{A(t) f_0'(k)} - k = \varphi(k),$$
т.е. приходим к (5). Итак, справедливость (6) доказана.

Согласно главе 1
$$F(K,L,t) = Lf(k,t), \tag{7}$$
$$F_0(K,L) = Lf_0(k). \tag{8}$$
Из (6) – (8) следует
$$F(K,L,t) = LA(t) f_0(k) = LA(t)\frac{1}{L}F_0(K,L) = A(t)F_0(K,L),$$
т.е. приходим к (2). Теорема доказана.

Повышая эффективность факторов производства, НТП вызывает перераспределение национального дохода. Так как национальный доход распределяется через ценообразование, а цены устанавливаются на уровне предельных производительностей факторов производства v и r, при этом коэффициенты эластичности выпуска по каждому из факторов представляют долю фактора в общем доходе, то доля труда составляет $\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}=\frac{vL}{Y}$, а доля капитала $\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}=\frac{rK}{Y}$. Для НТП по Хиксу распределение дохода между трудом и капиталом не изменяется, если не меняется ни фондовооруженность труда k, ни предельная норма замены труда капиталом при любом объёме выпуска, т.е.

$$\frac{\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}}{\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}}=\frac{rK}{vL}=\frac{K/L}{v/r}=\frac{K/L}{\frac{dK}{dL}}=\frac{K/L}{S_K}=\frac{k}{S_K}=\text{const.} \qquad (9)$$

Можно представить такой НТП смещением изокванты заданного выпуска в результате преобразования подобия с центром в начале координат (см. рис.1). Изокванта Y_c смещается к началу координат и «сжимается» так, что в точках её пересечения с лучом, представляющим заданную капиталовооружённость труда, наклон у обеих изоквант одинаков.

В этом случае при переходе от технологии A_0 к A_1 или от B_0 к B_1 заданный объём выпуска достигается при снижении затрат труда и капитала в одинаковое число раз, т.е. производительность труда и капитала растёт в одинаковой мере.

Как следует из (9), технический прогресс по Хиксу может быть и при изменении капиталовооружённости труда, если одновременно в такой же пропорции изменяется отношение предельных производительностей факторов *v/r*, т.е. требуется, чтобы эластичность замены $\sigma = 1$.

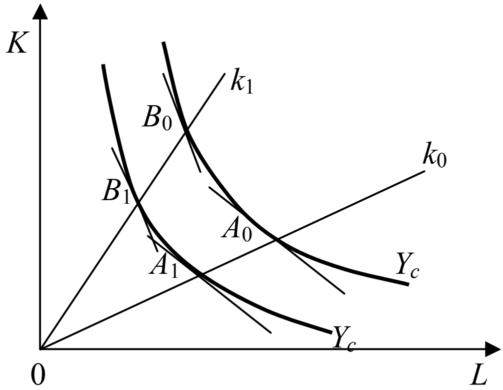

Рис. 1

Показатель эластичности замены труда капиталом σ равен частному от деления относительного приращения капиталовооружённости труда на относительное приращение отношения предельных производительностей труда и капитала, т.е. $\sigma = \dfrac{dk/k}{d\gamma/\gamma}$, где $\gamma = \dfrac{\partial Y}{\partial L} / \dfrac{\partial Y}{\partial K} = \dfrac{v}{r}$. Если $\sigma = 1$, то соблюдается условие (9) нейтральности НТП по Хиксу. При переходе от старой (A_0) к новой (A_1) технологии производства Y_c единиц благ капиталовооружённость труда ($\mathrm{tg}\alpha$) растёт в той же мере, что и предельная норма технической замены факторов ($\mathrm{tg}\beta$) (см. рис. 2).

Если $\sigma < 1$, то повышение на 1% капиталовооружённости труда сопровождается увеличением отношения предельных производительностей труда и капитала. В этом случае доля труда в доходе возрастает, следовательно, технический прогресс не является нейтральным по Хиксу.

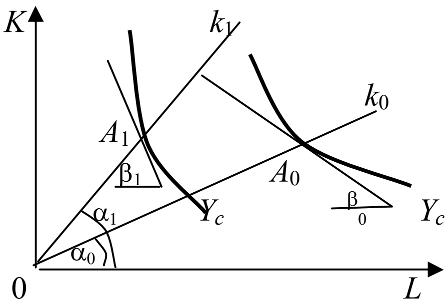

Рис. 2

Если $\lambda_L > \lambda_K$ (см.(1.15)), то технический прогресс – трудосберегающий (рис. 3), если $\lambda_K > \lambda_L$, то технический прогресс – капиталосберегающий (рис. 4).

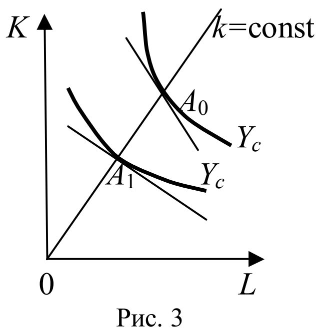

Рис. 3

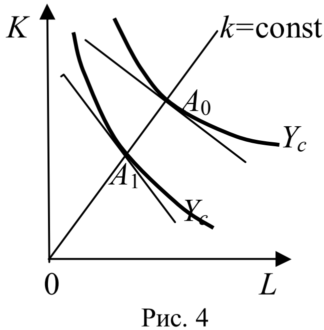

Рис. 4

Для σ >1 классификация разновидностей технического прогресса проводится аналогично.

Если сдвиг изокванты сопровождается изменением её наклона в точке пересечения с лучом заданной капиталовооружённости труда, то технический прогресс уже не нейтрален по Хиксу.

Уменьшение наклона смещённой изокванты (см. рис.3) означает, что при прежней капиталовооружённости предельная производительность капитала r возросла в большей мере, чем предельная производительность труда v. Теперь для замены единицы труда требуется меньше единиц капитала и такой вид НТП Хикс назвал трудосберегающим.

Когда после сдвига изокванта становится круче (см. рис.4), тогда НТП по классификации Хикса является капиталосберегающим.

Определение. НТП называется нейтральным по Харроду, если предельная фондоотдача r является некоторой функцией средней фондоотдачи z, которая не зависит от времени t:

$$r = \psi(z). \tag{10}$$

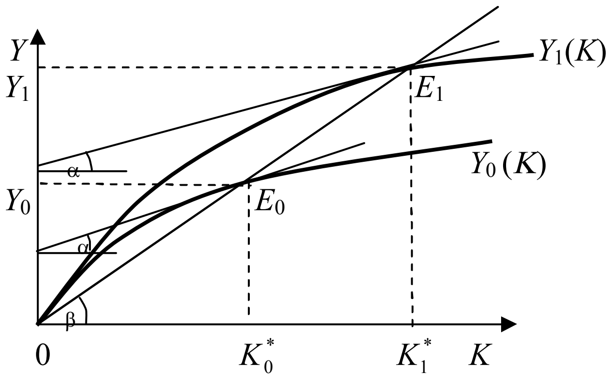

Рис.5

Предельная производительность капитала $r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \mathrm{tg}\alpha$, средняя производительность капитала $z = \frac{Y}{K} = \mathrm{tg}\beta$ (см. рис. 5).

Под воздействием НТП график производственной функции деформируется и сдвигается вверх ($Y_1(K)$), так как при том же количестве труда каждому объёму капитала соответствует больший выпуск.

Если график производственной функции сдвинут так, что точка E_1, определяющая оптимальный размер капитала при новой технике, окажется на продолжении прямой OE_0, то имел место нейтральный по Харроду НТП, так как $\frac{\partial Y_0}{\partial K_0} = \frac{\partial Y_1}{\partial K_1}$ и $\frac{Y_0}{K_0} = \frac{Y_1}{K_1}$, т.е. средняя производительность капитала является функцией предельной производительности, а не времени.

Теорема 2. ДПФ в случае нейтрального по Харроду НТП имеет вид

$$F(K(t),L(t),t) = F_0(K,A(t)L), \qquad (11)$$

т.е. является ДПФ типа b) (см. (1.10)).

Доказательство. Согласно главе 1,

$$r = f'(k,t), \quad z = \frac{f(k,t)}{k}. \qquad (12)$$

Подставляя (10) в (12), получаем для $f(k,t)$ дифференциальное уравнение вида

$$f'(k,t) = \psi\left(\frac{f(k,t)}{k}\right). \qquad (13)$$

Пусть $f_0(k)$ – некоторое частное решение уравнения (13), то есть

$$f_0'(k) = \psi\left(\frac{f_0(k)}{k}\right). \qquad (14)$$

Покажем, что общее решение $f(k,t)$ имеет вид

$$f(k,t)=A(t)f_0(k / A(t)). \qquad (15)$$

Проверим справедливость (15) подстановкой (15) в (13), в результате которой должно получиться тождество. Подстановка (15) в левую часть (13):

$$f'(k,t) = \frac{\partial f(k,t)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}\left[A(t) f_0(k / A(t))\right] = A(t)\frac{\partial f_0(k / A(t))}{\partial k} =$$

$$= A(t)\frac{\partial f_0(k / A(t))}{\partial(k / A(t))}\frac{\partial(k / A(t))}{\partial k} = A(t)\frac{1}{A(t)}\frac{\partial f_0(k / A(t))}{\partial(k / A(t))}.$$

Согласно (14)

$$f_0'(k/A(t)) = \psi\left(\frac{f_0(k/A(t))}{k/A(t)}\right).$$

Итак,

$$f'(k,t) = \psi\left(\frac{f_0(k/A(t))}{k/A(t)}\right). \qquad (16)$$

Подстановка (15) в правую часть (13):

$$\psi\left(\frac{f(k,t)}{k}\right) = \psi\left(\frac{A(t)f_0(k/A(t))}{k}\right) = \psi\left(\frac{f_0(k/A(t))}{k/A(t)}\right). \qquad (17)$$

Из (13), (16), (17) следует тождество. Тем самым справедливость (15) доказана.

Из (7) и (15) следует

$$F(K,L,t) = LA(t)f_0(k/A(t)). \qquad (18)$$

Из (8) следует

$$f_0(k) = (1/L)F_0(K,L)\ . \qquad (19)$$

Так как $k = K/L$, то из (19) получаем

$$f_0(K/L) = (1/L)F_0(K,L)\ . \qquad (20)$$

Заменим в (19) L на $A(t)L$. Тогда

$$f_0\left(\frac{K}{A(t)L}\right) = \frac{1}{A(t)L}F_0(K, A(t)L) = f_0\left(\frac{k}{A(t)}\right). \qquad (21)$$

Использование (21) в (18) даёт

$$F(K,L,t) = LA(t)\ \frac{1}{A(t)L}F_0(K,A(t)L) = F_0(K,A(t)L),$$

т.е. пришли к (10). Теорема доказана.

Определение. НТП называется нейтральным по Солоу, если предельная производительность труда v является некоторой функцией средней производительности труда y, которая не зависит от времени t, т.е.

$$v = g(y). \qquad (22)$$

Если на оси абсцисс рис. 5 вместо объёма капитала откладывалось бы количество используемого труда при заданном объёме капитала и tgα представлял бы не предельную производительность капитала r, а предельную производительность труда, то смещение графика производственной функции было бы следствием нейтрального по Солоу технического прогресса.

Теорема 3. ДПФ в случае нейтрального по Солоу НТП имеет вид

$$F(K(t),L(t),t) = F_0(A(t)K,L), \tag{23}$$

т.е. является ДПФ типа с) (см. (1.11),).

Доказательство. Согласно главе 1

$$v = f(k,t) - kf'(k,t), \;\; y = f(k,t). \tag{24}$$

Из (21), (23) следует

$$f(k,t) - kf'(k,t) = g(f(k,t)).$$

Отсюда получаем для $f(k,t)$ дифференциальное уравнение

$$f'(k,t) = \frac{1}{k}\left[f(k,t) - g(f(k,t))\right]. \tag{25}$$

Пусть $f_0(k)$ – некоторое частное решение уравнения (25), т.е.

$$f_0'(k) = \frac{1}{k}\left[f_0(k) - g(f_0(k))\right]. \tag{26}$$

Покажем, что общее решение $f(k,t)$ имеет вид

$$f(k,t) = f_0(A(t)k). \tag{27}$$

Проверим справедливость (27) подстановкой (27) в (25), в результате которой должно получиться тождество.

Подстановка (27) в левую часть (25):

$$f'(k,t) = \frac{\partial f(k,t)}{\partial k} = \frac{\partial f_0(A(t)k)}{\partial k} = \frac{\partial f_0(A(t)k)}{\partial(A(t)k)}\frac{\partial(A(t)k)}{\partial k} = \qquad 28)$$

$$= A(t)f_0'(A(t)k).$$

Из (26), меняя k на $A(t)k$, получаем

$$f_0'(A(t)k) = \frac{1}{A(t)k}[f_0(A(t)k) - g(f_0(A(t)k))]. \tag{29}$$

Подстановка (29) в (28) даёт

$$f'(k,t) = \frac{1}{k}[f_0(A(t)k) - g(f_0(A(t)k))]. \quad (30)$$

Подстановка (27) в правую часть (25):

$$\frac{1}{k}[f(k,t) - g(f(k,t))] = \frac{1}{k}[f_0(A(t)k) - g(f_0(A(t)k))]. \quad (31)$$

Из (25), (30), (31) следует тождество, тем самым справедливость (27) доказана.

Из (7) и (27) следует

$$F(K,L,t) = Lf(k,t) = Lf_0(A(t)k)\ . \quad (32)$$

Из (8) следует

$$f_0(k) = \frac{1}{L}F_0(K,L) = f_0\left(\frac{K}{L}\right). \quad (33)$$

Заменим в (33) K на $A(t)K$. Тогда

$$f_0\left(\frac{A(t)K}{L}\right) = \frac{1}{L}F_0(A(t)K,L) = f_0\big(A(t)k\big). \quad (34)$$

Тогда из (32) и (34) следует

$$F(K,L,t) = L\frac{1}{L}F_0(A(t)K,L) = F_0(A(t)K,L),$$

т.е. пришли к (23). Теорема доказана.

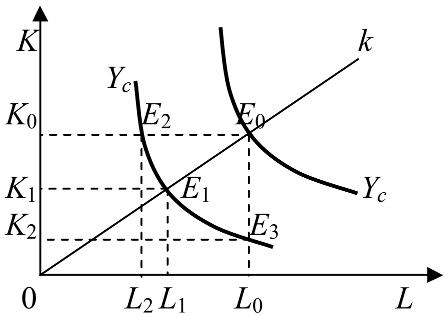

Рис.6

В случае НТП по Солоу как бы увеличивается количество капитала в той же пропорции, в которой увеличивается объём труда, поэтому предельная производительность ТР не меняется: $Y(t) = F(A(t)K,L)$.

Вывод. Нейтральные по Харроду и Солоу НТП являются *экзогенными*. При этом в случае НТП по Харроду как бы увеличивается количество труда в той пропорции, в которой растёт капитал, поэтому предельная производительность ОФ не меняется: $Y(t) = F(K,A(t)L)$.

При представлении НТП в виде смещающейся и деформирующейся изокванты заданного выпуска рассмотренные разновидности нейтральности можно изобразить, как на рис. 6. Если в результате ТП вместо технологии L_0K_0 оптимальной оказывается технология L_1K_1, то это нейтральный по Хиксу НТП. Переход из E_0 в E_2 представляет нейтральный по Харроду НТП, а из E_0 в E_3 – по Солоу.

§3. Общие условия НТП

Пусть

$$F(K^*(t),L^*(t),t) = F(A_K(t)K(t),A_L(t)L(t)), \quad (1)$$

т.е.

$$Y(t) = F(A_K(t)K(t),A_L(t)L(t)), \quad (2)$$

причём

$$A_K(t) = e^{\lambda_K t}, \ A_L(t) = e^{\lambda_L t}, \ \lambda_K > 0, \ \lambda_L > 0. \quad (3)$$

Очевидно, что мультипликаторы $A_K(t)$, $A_L(t)$ удовлетворяют условиям

$$A_K(t) > 0, A_L(t) > 0, \dot{A}_K(t) > 0, \dot{A}_L > 0, \quad (4)$$

так как

$$\dot{A}_K(t) = \lambda_K e^{\lambda_K t} = \lambda_K A_K(t), \dot{A}_L(t) = \lambda_L e^{\lambda_L t} = \lambda_L A_L(t). \quad (5)$$

Считая $F(\cdot)$ ЛОПФ, получим для модели экономики (1)–(3) условие (1.12), являющееся условием НТП.

Последовательно имеем

$$\frac{dY(t)}{dt}=\frac{dF(K^*(t),L^*(t))}{dt}=\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)}\frac{dK^*(t)}{dt}+\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L^*(t)}\frac{dL^*(t)}{dt}=$$

$$=\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)}\frac{d[A_K(t)K(t)]}{dt}+\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L^*(t)}\frac{d[A_L(t)L^*(t)]}{dt}=$$

$$=\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)}\left[\frac{dA_K(t)}{dt}K(t)+A_K(t)\frac{dK(t)}{dt}\right]+$$

$$=\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L^*(t)}\left[\frac{dA_L(t)}{dt}L(t)+A_L(t)\frac{dL(t)}{dt}\right]=$$

$$=\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)}K(t)\left[\lambda_K e^{\lambda_K t}+e^{\lambda_K t}\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)}\right]+$$

$$+\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L^*(t)}L(t)\left[\lambda_L e^{\lambda_L t}+e^{\lambda_L t}\frac{dL(t)}{dt}\frac{1}{L(t)}\right]=$$

$$=\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)}e^{\lambda_K t}K(t)\left[\lambda_K+\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)}\right]+$$

$$+\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L^*(t)}e^{\lambda_L t}L(t)\left[\lambda_L+\frac{dL(t)}{dt}\frac{1}{L(t)}\right]. \qquad (6)$$

Введём

$$\hat{Y}(t)=\frac{dY}{dt}\frac{1}{Y(t)}=\frac{dY(t)}{dt}\frac{1}{F(K^*(t),L^*(t))}=\frac{dF(\cdot)}{dt}\frac{1}{F(\cdot)},$$

$$\hat{K}(t)=\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)},\quad \hat{L}(t)=\frac{dL(t)}{dt}\frac{1}{L(t)}. \qquad (7)$$

Тогда, после деления (6) на $Y(t) = F(K^*(t),L^*(t))$, получим

$$\hat{Y}(t)=\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)}\frac{1}{F(\cdot)}K^*(t)[\lambda_K+\hat{K}(t)]+$$

$$+\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L^*(t)}\frac{1}{F(\cdot)}L^*(t)[\lambda_L+\hat{L}(t)]. \qquad (8)$$

Согласно главе 1

$$\frac{\partial F}{\partial K^*}\frac{K^*}{F}=\alpha,\qquad \frac{\partial F}{\partial L^*}\frac{L^*}{F}=\beta \tag{9}$$

являются коэффициентами эластичности соответственно по $K^*(t)$ и $L^*(t)$. Используя (9) в (8), ($\beta = 1 - \alpha$) получаем

$$\hat{Y}(t)=\alpha[\lambda_K+\hat{K}(t)]+(1-\alpha)[\lambda_L+\hat{L}(t)], \tag{10}$$

или ($\alpha = 1 - \beta$)

$$\hat{Y}(t)=(1-\beta)[\lambda_K+\hat{K}(t)]+\beta[\lambda_L+\hat{L}(t)]\,. \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) следуют два эквивалентных представления:

$$\hat{Y}(t)=\lambda_L+\alpha(\lambda_K-\lambda_L)+\hat{L}(t)+\alpha[\hat{K}(t)-\hat{L}(t)], \tag{12}$$

$$\hat{Y}(t)=\lambda_K+\beta(\lambda_L-\lambda_K)+\hat{K}(t)+\beta[\hat{L}(t)-\hat{K}(t)]. \tag{13}$$

Так как

$$\hat{Y}(t)>0\Rightarrow\frac{dF(\cdot)}{dt}>0, \tag{14}$$

то из (12) – (14) следуют два эквивалентных условия НТП:

$$\lambda_L+\alpha(\lambda_K-\lambda_L)+\hat{L}(t)+\alpha[\hat{K}(t)-\hat{L}(t)]>0, \tag{15}$$

$$\lambda_K+\beta(\lambda_L-\lambda_K)+\hat{K}(t)+\beta[\hat{L}(t)-\hat{K}(t)]>0. \tag{16}$$

Если объёмы капитала и труда постоянны, т.е.

$$K(t) = K = \mathrm{const},\ L(t) = L = \mathrm{const}, \tag{17}$$

то

$$\hat{K}(t)=0,\qquad \hat{L}(t)=0, \tag{18}$$

и условия НТП, т.е. условия возрастания во времени ВП $Y(t)$, приобретают вид

$$\lambda_L+\alpha(\lambda_K-\lambda_L)>0\,, \tag{19}$$

$$\lambda_K+\beta(\lambda_L-\lambda_K)>0\,. \tag{20}$$

§ 4. Оптимизация распределения трудовых ресурсов

До сих пор мы полагали, что K и L – однородные ОФ и ТР. Но в процессе экономического развития появляются новые ОФ и соответственно меняется квалификация ТР, эксплуатирующих новые ОФ. Поэтому нельзя считать однотипными ОФ, созданные в разное время, и эксплуатирующие их ТР.

В связи с обозначенной проблемой рассмотрим следующую задачу. Пусть t и τ – два момента времени (например, годы) такие, что $t \geq \tau$. Пусть $K(t, \tau)$ – часть ОФ $K(\tau)$, введённых в эксплуатацию в момент времени τ, которые продолжают функционировать в момент времени t. Очевидно, что

$$K(t,\tau) \leq K(\tau,\tau) = K(\tau). \qquad (1)$$

Пусть $L(t,\tau)$ – часть общих ТР $L(t)$, эксплуатирующих ОФ $K(t,\tau)$. Очевидно, что

$$L(t,\tau) \leq L(t,t) = L(t). \qquad (2)$$

Пусть $Y(t,\tau)$ – часть общего ВП $Y(t)$, созданного на основе $K(t,\tau)$ и $L(t,\tau)$, т.е.

$$Y(t,\tau) = F(K(t,\tau), L(t,\tau), \tau). \qquad (3)$$

Очевидно, что

$$Y(t,\tau) \leq Y(t, t) = Y(t). \qquad (4)$$

Замечание. ДПФ $F(\cdot)$ в (3), которая предполагается ЛОПФ, зависит от момента времени τ. Тем самым предполагается, что ОФ, введённые в эксплуатацию в момент времени τ, эксплуатируются в момент времени t таким же образом, как и в момент их создания.

Из (3) и (4) следует, что общий ВВП $Y(t)$, созданный в момент времени t, будет определяться формулой

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} Y(t,\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} F(K(t,\tau), L(t,\tau), \tau)d\tau. \qquad (5)$$

Наличие нижнего предела в интеграле в формуле (5), равного «-∞», нужно понимать в том смысле, что производство, предшествующее текущему моменту времени t, было начато достаточно далеко в прошлом. Соответственно, количество ТР $L(t)$, занятых в производстве в момент времени t, будет определяться формулой

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} L(t,\tau)d\tau. \qquad (6)$$

Задача. При заданных $K(t,\tau)$,$L(t)$,$F(K\ L,t)$ таким образом выбрать распределение ТР $L(t,\tau)$, чтобы ВВП $Y(t)$ достигал максимального значения.

Таким образом получили задачу

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} F(K(t,\tau), L(t,\tau),\tau)d\tau \Rightarrow \max_{\{L(t,\tau)\}}, \qquad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{t} L(t,\tau)d\tau = L(t), \qquad (8)$$

которая является задачей вариационного исчисления: найти функцию $y(x)$, такую, что $(y' = \dfrac{dy}{dx})$

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')dx \Rightarrow \text{extremum}, \qquad (9)$$

и при этом выполняется условие

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y')dx = l, \qquad (10)$$

где y_0, y_1, l – заданные величины.

Основная теорема вариационного исчисления: искомая функция является решением дифференциального уравнения Эйлера

$$\tilde{\varphi}'_y - \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}'_{y'} = 0, \qquad (11)$$

где

$$\widetilde{\varphi}(x,y,y') = \varphi(x,y,y') + \lambda g(x,y,y'), \tag{12}$$

$\widetilde{\varphi}'_y = \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial y}$, $\widetilde{\varphi}'_{y'} = \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial y'}$, а λ – множитель Лагранжа, который находится из условия (10).

Теорема 4. Пусть

$$k(t,\tau) = \frac{K(t,\tau)}{L(t,\tau)}, f(k,\tau) = \frac{F(K(t,\tau),L(t,\tau),\tau)}{L(t,\tau)}. \tag{13}$$

Тогда оптимальное в смысле поставленной задачи значение $L^*(t,\tau)$ для $L(t,\tau)$ определяется формулой

$$L^*(t,\tau) = \frac{K(t,\tau)}{k^*(\mu(t),\tau)}, \tag{14}$$

где $k^*(\mu(t),\tau)$ – единственное решение уравнения

$$f(\cdot) - kf'(k,\tau) = \mu(t), \tag{15}$$

а $\mu(t)$ – множитель Лагранжа, являющийся решением уравнения

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{K(t,\tau)}{k^*(\mu(t),\tau)} d\tau = L(t). \tag{16}$$

Доказательство.

Из сопоставления [(7),(8)]$\leftrightarrow$[(9),(10)] следуют соответствия

$$\tau\leftrightarrow x,\ L(t,\tau)\leftrightarrow y(x),\ F\leftrightarrow\varphi,\ L(t,\tau)\leftrightarrow g,\ L(t)\leftrightarrow l,\ y'\leftrightarrow L'(t,\tau). \tag{17}$$

Таким образом, из (12), (17) следует

$$\widetilde{F}(\cdot) = F(K(t,\tau),L(t,\tau),\tau) + \lambda(t)L(t,\tau), \tag{18}$$

где множитель Лагранжа $\lambda(t)$ зависит от t, как от параметра. Так как $F(\cdot)$ не зависит от $L'(t,\tau)$, то, согласно (11), (17), (18), уравнение Эйлера для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial L} = 0. \tag{19}$$

Тогда, используя (18) в (19) с заменой $\lambda(t) = -\mu(t)$, получаем окончательный вид уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F(K(t,\tau), L(t,\tau), \tau)}{\partial L(t,\tau)} = \mu(t). \qquad (20)$$

Согласно главе 1 величина

$$\nu = \frac{\partial F(K(t,\tau), L(t,\tau), \tau)}{\partial L(t,\tau)} \qquad (21)$$

является предельной производительностью ТР $L(t,\tau)$. Тогда соотношения (20), (21) означают: в задаче (7), (8) множитель Лагранжа $\mu(t)$ равняется предельной производительности ТР $L(\tau)$. Согласно главе 1 v выражается через $f(k, t)$ в виде

$$\nu(k,\tau) = f(k,\tau) - kf'(k,\tau). \qquad (22)$$

Таким образом, уравнение (15) следует из (20) – (22). Докажем единственность этого решения. Из (22) следует

$$\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial k} - \frac{\partial f}{\partial k} - k\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = -k\frac{\partial^2 f}{\partial k^2}. \qquad (23)$$

Так как $k > 0$, а по НКУ $f'' < 0$, то из (23) следует, что $\frac{\partial v}{\partial k} > 0$, т.е. $v(k)$ будет положительной, монотонно возрастающей функцией k. Так как $\mu(t) > 0$, то уравнение $v(k,\tau) = \mu(t)$ имеет единственное решение $k^* = k^*(\mu(\tau),\tau)$. Поскольку, согласно (13),

$$k^* = \frac{K(t,\tau)}{L^*(t,\tau)}, \qquad (24)$$

то (14) следует из (24). Использование (14) в (8) приводит к (16). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что возможность решения задачи в окончательном виде, т.е. в виде формул, определяющих решение через заданные по постановке задачи $K(t,\tau)$, $F(K,L,\tau)$ и $L(t)$ определяется возможностью решения уравнения (15) и вычисления интеграла в (16). Далее рассмотрим случай, допускающий такую возможность.

4.1. *Случай производственной функции Кобба – Дугласа*

Теорема 5. Пусть

$$F(K(t,\tau),L(t,\tau),\tau) = A(\tau)K^{\alpha}(t,\tau)L^{\beta}(t,\tau), \tag{25}$$

$$A(\tau) > 0,\ A'(\tau) > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1, \tag{26}$$

т.е. $F(K,L,\tau)$ является ДПФ типа Кобба-Дугласа, определяющей относительно временной переменной τ эндогенный НТП. Тогда:

1) оптимальный вид $L^*(t,\tau)$ ТР $L(t,\tau)$ определяется формулой

$$L^*(t,\tau) = \frac{A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)}{\int_{-\infty}^{t} A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)d\acute{r}\mathrm{C}} L(t); \tag{27}$$

2) ВВП $Y^*(t,\tau)$, созданный за счёт $K(t,\tau)$ и $L^*(t,\tau)$ определяется формулой

$$Y^*(t,\tau) = \frac{A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)}{\left[\int_{-\infty}^{t} A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)d\tau\right]^{\beta}} L^{\beta}(t); \tag{28}$$

3) общий ВВП $Y^*(t)$, созданный к моменту времени t при использовании $L(t,\tau)$, определяется формулой

$$Y^*(t) = \left(K^*(t)\right)^{\alpha} L^{\beta}(t), \tag{29}$$

где

$$K^*(t) = \int_{-\infty}^{t} A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)d\tau \tag{30}$$

есть ОФ, эксплуатируемые в момент времени t, если на интервале времени $[\tau\ ,t]$ использовалось оптимальное распределение ТР.

Доказательство. Согласно (13), (25)

$$f(k,\tau) = A(\tau)\, k^{\alpha}(t,\tau). \tag{31}$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial k} = A(\tau)\alpha k^{\alpha-1},\ k\frac{\partial f}{\partial k} = A(\tau)\alpha k^{\alpha},$$

$$f - k\frac{\partial f}{\partial k} = A(\tau)k^{\alpha} - \alpha A(\tau)k^{\alpha} = (1-\text{ŕï})A(\tau)k^{\alpha} =$$

$$= \beta A(\tau)k^{\alpha}.$$

Таким образом, уравнение (15) приобретает вид

$$\beta A(\tau)k^{\alpha}(t,\tau) = \mu(t). \tag{32}$$

Отсюда, разрешая (32) относительно $k\ (t,\tau)$, получаем выражение оптимального значения $k(t,\tau)$ через множитель Лагранжа $\mu(t)$:

$$k^{*}(\mu(t),\tau) = \left[\frac{\mu(t)}{\beta A(\tau)}\right]^{1/\alpha}. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (16), найдём $\mu(t)$:

$$\int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)\frac{\beta^{1/\alpha}A^{1/\alpha}(t)}{\mu^{1/\alpha}(t)}d\tau = L(t)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ŕA}^{1/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}(t)}\int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)A^{1/\alpha}(\tau)d\tau = L(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(t)(\alpha\mu(t))^{1/\alpha} = \beta^{1/\alpha}\int_{-\infty}^{t} A^{1/\alpha}(\tau)K(\tau,\tau)d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(t) = \beta\left[\frac{\int\limits_{-\infty}^{t} A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)d\tau}{L(t)}\right]^{\alpha}. \qquad (34)$$

Использование (34) в (33) даёт

$$k^*(\mu(t),\tau) = k^*(t,\tau) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{t} A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)d\tau}{A^{1/\alpha}(\tau)L(t)}. \qquad (35)$$

Так как $k^*(t,\tau) = K(t,\tau)/L^*(t,\tau)$, т.е.

$$L^*(t,\tau) = K(t,\tau)/k^*(t,\tau), \qquad (36)$$

то формула (27) следует из (35), (36). Так как, согласно формуле (25)

$$Y^*(t,\tau) = F(K(t,\tau),L^*(t,\tau),\tau) = A(\tau)K^{\alpha}(t,\tau)(L^*(t,\tau))^{\beta}, \qquad (37)$$

то из (27) и (37) следует

$$Y^*(t,\tau) = A(t)K^{\alpha}(t,\tau)L^{\beta}(t)\frac{A^{\beta/\alpha}(\tau)K^{\beta}(t,\tau)}{\left[\int\limits_{-\infty}^{t} A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)d\tau\right]^{\beta}} =$$

$$= \frac{A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)}{\left[\int\limits_{-\infty}^{t} A^{1/\alpha}(\tau)K(t,\tau)d\tau\right]^{\beta}} L^{\beta}(t),$$

т.е. пришли к формуле (28).Так как, согласно (5),

$$Y^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} Y^*(t,\tau)d\tau, \qquad (38)$$

то использование (28) в (38) приводит с учётом (26) к (29), (30). Теорема доказана.

Вывод. Формуле (29) может быть дана следующая экономическая интерпретация. Если $Y(t,\tau)$, $K(t,\tau)$,

$L(t,\tau)$ определяют экономический процесс относительно $Y(t,\tau)$ в соответствии ДПФ КД

$$Y(t,\tau) = A(\tau)K(t,\tau)L(t,\tau), \tag{39}$$

то при оптимальном использовании ТР в виде $L^*(t,\tau)$ экономический процесс относительно производства общего ВВП $Y^*(t)$ определяется также ПФ КД $F^*(K^*(t),L(t))$ вида

$$F^*(K^*(t),L(t)) = (K^*(t))^\alpha L^\beta(t). \tag{40}$$

При этом $K^*(t)$ представляет собой ОФ в момент времени t, которые получаются путём пересчёта по формуле (30) ОФ $K(t,\tau)$ с коэффициентом переоценки

$$A_0(\tau) = A^{1/\alpha}(\tau). \tag{41}$$

Следствие. Если производственный процесс относительно $Y(t,\tau)$ определяется ДПФ КД вида (25), то при оптимальном использовании ТР

$$Y(t,\tau) = [A_0(\tau)K(t,\tau)]^\alpha L^\beta(t,\tau)=F_0(A_0(\tau)K(t,\tau),L(t,\tau)), \tag{42}$$

т.е. он определяет НТП, нейтральный по Солоу.

Так как из (41) следует, что $A(\tau) = (A_0(\tau))^\alpha$, то (42) получается из (25) очевидным образом.

Теорема 6. Пусть

$$\left.\begin{aligned} &K(t,\tau) = K(\tau)e^{\delta(\tau-t)}, \delta > 0;\\ &K(\tau) = K_0 e^{\varepsilon\tau}, K_0 > 0,\ \varepsilon > 0;\\ &A(\tau) = A_0 e^{a\tau},\ A_0 > 0,\ a > 0.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Тогда

$$L^*(t,\tau) = \left(\frac{a}{\alpha}+\varepsilon+\delta\right)\exp\left\{-\left(\frac{a}{\alpha}+\varepsilon+\delta\right)(t-\tau)\right\}L(t), \tag{44}$$

$$K^*(t) = K_0 A^{1/\alpha}\left(\frac{a}{\alpha}+\varepsilon+\delta\right)^{-1}\exp\left\{\left(\frac{a}{\alpha}+\varepsilon\right)t\right\}, \tag{45}$$

$$Y^*(t) = A_0 K_0{}^{\alpha} \left(\frac{a}{\alpha} + \varepsilon + \delta \right)^{-\alpha} \exp\{(a + \varepsilon\alpha)t\} L^{\beta}(t), \tag{46}$$

$$Y^*(t,\tau) = A_0 K_0{}^{\alpha} \left(\frac{a}{\alpha} + \varepsilon + \delta \right)^{\beta} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\left(\frac{a}{\alpha} + \varepsilon + \delta \right)(t - \tau) \right\} \exp\{(a + \varepsilon\alpha)\} L^{\beta}(t). \tag{47}$$

Замечание. Доказать самостоятельно. Дать экономическую интерпретацию решения (44)–(47), исследовать поведение решения в зависимости от параметров A_0, δ, ε, a.

Задания для самостоятельной работы

Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$

1. Показать, что для ПФ

$$F(\cdot) = A(t)F_0(K^{\alpha}, L^{\beta}) = A(t)K^{\alpha}L^{\beta}.$$

выполняется нейтральность по Хиксу.

2. Показать, что для ПФ

$$F(\cdot) = F_0(K, A(t)L) = K^{\alpha}\,[A(t)L]^{\beta}$$

выполняется нейтральность по Харроду.

3. Показать, что для ПФ

$$F(\cdot) = F_0(A(\mathrm{t})K, L) = [A(t)\,K]^{\alpha}L^{\beta}$$

выполняется нейтральность по Солоу.

4. Пусть в проблеме распределения трудовых ресурсов

$$K(t,\tau) = K(\tau)\, e^{\delta(\tau - t)}, \quad \delta > 0;$$

$$K(\tau) = K_0\, e^{\varepsilon\tau}, \quad K_0 > 0,\ \varepsilon > 0;$$

$$A(\tau) = A_0\, e^{a\tau}, \quad A_0 > 0,\ a > 0;$$

Найти $L^*(t,\tau)$, $K^*(t)$, $Y^*(t)$, $Y^*(t,\tau)$ и исследовать их зависимость от параметров A_0, a, ε, δ. Дать экономическую интерпретацию решения.

Глава 3. Максимизация потребления и экономический рост

§1. Математическая модель

Пусть
$$Y(t) = F(K(t),L(t))\ ,\ \ t \geq 0, \tag{1}$$
где $F(\cdot)$ – ЛОПФ. Пусть весь ВП $Y(t)$ делится на две части $I(t)$ и $C(t)$, где $I(t)$ – инвестиции (накопления), а $C(t)$ – потребление, в пропорциях s и $\tilde{s} = 1 - s$, т.е.
$$Y(t) = I(t) + C(t) = sY(t) + (1 - s)Y(t) =$$
$$= sF(K(t),L(t)) + (1 - s)F(K(t),L(t)), \tag{2}$$
$$0 < s < 1. \tag{3}$$
Параметр s называется нормой накопления, а параметр $\tilde{s} = 1 - s$ – нормой потребления. Часть ВП, равная $I(t)$ идёт на воспроизводство ОФ $K(t)$, а часть ВП, равная $C(t)$, – на воспроизводство ТР $L(t)$.

Естественная цель экономики – это максимизация потребления $C(t)$, т.е. деление ВП $Y(t)$ на накопление $I(t)$ и потребление $C(t)$ и, соответственно, выбор параметра s таким образом, чтобы составляющая $C(t) = (1 - s)F(\cdot)$ ВП достигала максимального значения. Поскольку объём ВП $Y(t)$ зависит от объёма ОФ $K(t)$ и ТР $L(t)$, то соотношений (1) – (3) недостаточно для формальной постановки задачи.

Пусть $\mu > 0$ – коэффициент амортизации ОФ, т.е. процентная убыль $K(t)$ в единицу времени за счёт их использования. Очевидно (↑ – возрастание, ↓ – убывание):
$$\begin{gathered} K(t) = \text{const},\ \text{если } I(t) = \mu K(t); \\ K(t)\uparrow,\ \text{если } I(t) > \mu K(t); \\ K(t)\downarrow,\ \text{если } I(t) < \mu K(t). \end{gathered} \tag{4}$$
Если $\dot{K}(t) = dK(t)/dt$, то из (4) следует

$$\dot{K}(t) = 0, \text{ если } I(t) = \mu K(t);$$
$$\dot{K}(t) > 0, \text{ если } I(t) > \mu K(t); \qquad (5)$$
$$\dot{K}(t) < 0, \text{ если } I(t) < \mu K(t).$$

Тогда из (2) и (5) для ОФ $K(t)$ следует дифференциальное уравнение

$$\dot{K}(t) = sF(K(t), L(t)) - \mu K(t), \quad t \geq 0. \qquad (6)$$

Поскольку $C(t) = (1 - s)F(K(t),L(t))$, то задача максимизации потребления ставится следующим образом: при заданном изменении ТР $L(t)$ и изменении ОФ $K(t)$ в соответствии с дифференциальным уравнением (6) найти такое значение параметра s, удовлетворяющего условию (3), чтобы величина потребления $C(t)$ достигала максимального значения. Таким образом, критерий оптимальности имеет вид

$$C(t) = (1 - s)F(K(t), L(t)) \Rightarrow \max_{\{0<s<1\}}. \qquad (7)$$

Модифицируем постановку задачи для нормированных параметров

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, \quad c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \quad f(k(t)) = \frac{F(K(t), L(t))}{L(t)}, \qquad (8)$$

где $k(t)$ – фондовооружённость, $c(t)$ – удельное потребление на единицу ТР и $y = f(k(t))$ – средняя производительность труда.

Тогда (2) примет вид

$$y(t) = i(t) + c(t) = sy(t) + (1 - s)y(t) =$$
$$= sf(k(t)) + (1 - s)f(k(t)), \qquad (9)$$

где $i(t)$ – инвестиции в воспроизводство $k(t)$. Из соотношения (6) с учётом (8) получим

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = sf(k(t)) - \mu k(t). \qquad (10)$$

Так как

$$\dot{k}(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{K(t)}{L(t)}\right] = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)}\dot{L}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - k(t)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}, \quad (11)$$

то из (10) и (11) следует

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \mu k(t) - k(t)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} =$$

$$= sf(k(t)) - \left(\mu + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right)k(t). \quad (12)$$

Рассматриваем далее экспоненциальный закон изменения ТР, т.е. полагаем

$$L(t) = L_0 e^{\lambda t},\ L_0 > 0,\ \lambda > 0. \quad (13)$$

Тогда

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\lambda L_0 e^{\lambda t}}{L_0 e^{\lambda t}} = \lambda,$$

и, таким образом, уравнение (12) принимает вид

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\mu + \lambda)k(t),\ t > 0. \quad (14)$$

Из (7) в соответствии с (8) получаем

$$c(t) = (1 - s)f(k(t)) \Rightarrow \max_{0<s<1}. \quad (15)$$

Необходимо найти такое значение параметра s (нормы накопления), удовлетворяющего условию (3), при экспоненциальном изменении ТР вида (13) и изменении фондовооружённости $k(t)$ в соответствии с уравнением

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \nu k(t), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

$$\nu = \mu + \lambda, \quad \mu > 0, \quad \lambda > 0, \quad (17)$$

чтобы величина удельного потребления $c(t)$ достигала максимального значения, т.е. чтобы выполнялось условие (15).

§2. Стационарные траектории

Каждому значению параметра s из интервала ($0 < s < 1$) соответствует своя траектория дифференциального уравнения

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - \nu k(t),\ t \ge 0,\ \ \nu = \mu + \lambda > 0, \qquad (1)$$

при некотором начальном условии $k(0) = k_0$, которую будем обозначать $k_s(t)$. Если экономика функционирует достаточно долго, то встаёт вопрос о существовании стационарного значения $k_s(t) = \text{const} = k_s$ для решения уравнения (1).

Определение. Стационарное значение k_s решения уравнения (1) как функцию параметра s будем называть стационарной траекторией.

Теорема 1. Стационарная траектория k_s является единственным корнем уравнения,

$$sf(k) - \nu k = 0, \qquad (2)$$

причём $k_s > 0$.

Доказательство. Так как $\dot{k} = 0$ при $k = \text{const}$, то условие (2) является условием существования стационарной траектории k_s. Докажем единственность решения. Введём функцию

$$\gamma(k) = \frac{f(k)}{k}. \qquad (3)$$

Тогда уравнение (2) перепишется в виде

$$\gamma(k) = \frac{\nu}{s}. \qquad (4)$$

С использованием неоклассичечких условий для функции $f(k)$ и правила Лопиталя получаем

$$\lim_{k\to 0}\gamma(k) = \lim_{k\to 0}\frac{f(k)}{k} = \left(\lim\frac{0}{0}\right) = \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \qquad (5)$$

$$\lim_{k\to\infty}\gamma(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(k)}{k}=\left(\lim\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{k\to\infty}f'(k)=0. \qquad (6)$$

Из (3) следует

$$\gamma'(k)=\frac{f'(k)}{k}-\frac{f(k)}{k^2}=\frac{kf'(k)-f(k)}{k^2}. \qquad (7)$$

Покажем, что $\gamma(k)$ является монотонно убывающей функцией k, т.е., согласно (5), (6)

$$\gamma(k)\downarrow_0^\infty \text{ при } k\uparrow_0^\infty. \qquad (8)$$

Так как условием монотонности убывания $\gamma(k)$ является условие $\gamma'(k)<0$, то из (7) следует, что доказать монотонность убывания – значит доказать свойство

$$kf'(k)-f(k)<0. \qquad (9)$$

Так как по неоклассическим условиям (НКУ) $f(0) = 0$, очевидно, что

$$f(k)=\int_0^k f'(u)du. \qquad (10)$$

Поскольку, согласно НКУ, $f''(k) < 0$, т.е. $(f'(k))' < 0$, то $f'(k)$ – убывающая функция, т.е. $f'(u) > f'(k)$. Тогда из (10) следует

$$f(k)>\int_0^k f'(k)du=kf'(k). \qquad (11)$$

Так как $f(k) > kf'(k)$, то отсюда следует справедливость (9), а значит, и справедливость (8).

Из (2) и (3) следует, что уравнение (2) может быть представлено в виде

$$\gamma(k)=\frac{\nu}{s}. \qquad (12)$$

Тогда из доказанного свойства для $\gamma(k)$ и из того, что $\gamma > 0$, $s > 0$, следует единственность решения уравнения (12) и соответственно уравнения (2) (см. рис.1).

Вывод. Из рис. 1 следует, что стационарное значение k_s фондовооружённости тем больше, чем меньше ν и чем больше s.

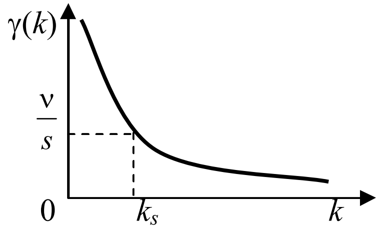

Рис. 1

Замечание. Дать экономическую интерпретацию этих зависимостей.

Следствие. Для $\nu \neq 0$ и $s \neq 0$ функция $\gamma(k)$ обладает свойствами:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \gamma(k_s) = \dfrac{\nu}{s}; \\ 2) & \gamma(k) > \dfrac{\nu}{s}; \text{ если } \quad 0 < k < k_s; \\ 3) & \gamma(k) < \dfrac{\nu}{s}, \quad \text{если } \ k > k_s. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

§3. Решение задачи на стационарных траекториях

Поставленную в §1 задачу будем решать на стационарных траекториях: найти значение $s = s^*$ и соответствующее значение $k_s = k^*$ из условия

$$c(s) = (1 - s)f(k_s) \Rightarrow \max_{0<s<1}. \qquad (1)$$

Теорема 2. Оптимальное значение s^* нормы накопления определяется двумя эквивалентными формулами

$$s^* = \frac{\gamma k^*}{f(k^*)}, \qquad (2a)$$

$$s^* = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}, \tag{2б}$$

где соответствующее оптимальное значение фондовооружённости k^* является единственным корнем уравнения

$$k^*:\ f'(k) = \nu. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(k) = sf(k) - \nu k = ks\left[\gamma(k) - \frac{\nu}{s}\right]. \tag{4}$$

Тогда, с учётом свойств функции $\gamma(k)$ (см. (2.13)), функция $\varphi(k)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ \varphi(k_s) = 0; \\ &2)\ \varphi(k) > 0, \text{ если } 0 < k < k_s; \\ &3)\ \varphi(k) < 0, \text{ если } k > k_s. \end{aligned} \tag{5}$$

Построим с учётом свойств $f(k)$ графики функций $y = \nu k$ и $y = f(k)$. Точка $\tilde{k}$ – единственный корень уравнения

$$\tilde{k} : f(k) = \nu k. \tag{6}$$

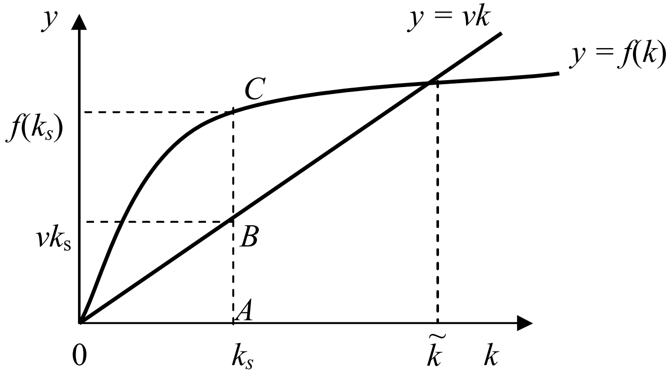

Рис. 2

Очевидно, что чем больше ν, тем меньше $\tilde{k}$ и наоборот.

Замечание. Дать экономическую интерпретацию для $\tilde{k}$ и указанного свойства.

Очевидно:

$$\begin{aligned} &1)\quad f(\tilde{k}) = \nu\tilde{k};\\ &2)\ f(k) > \nu k, \text{ если } 0< k< \tilde{k};\\ &3)\ f(k)< \nu k, \text{ если } k > k. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $0 < s <1$, то из того, что $f(k) - \nu k < 0$ следует, что $sf(k) - \nu k < 0$. Таким образом,

$$sf(k) - \nu k < 0, \text{ если } k > \tilde{k}\,. \tag{8}$$

Тогда, согласно (4), (8),

$$\varphi(k) < 0, \text{ если } k > \tilde{k}, \tag{9}$$

и из (5), (9) следует, что

$$k_s< \tilde{k}. \tag{10}$$

Замечание. Дать экономическую интерпретацию свойства (10).

Так как, согласно (4), (5), справедливо тождество

$$sf(k_s) = \nu k_s, \tag{11}$$

то из рис. 2 следует

$$\begin{aligned} &\left|BC\right| = \left|AC\right| - \left|AB\right| =\\ &=f(k_s) - \nu k_s = f(k_s) - sf(k_s) = (1 - s)f(k_s). \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, из (1) и (12) следует, что задача максимизации удельного потребления $c(s)$ свелась к поиску точки $k_s = k^*$, такой, что $0 < k^* < \tilde{k}$, для которой длина $\left|BC\right|$ отрезка BC, которую обозначим $\left|B^*C^*\right|$, является наибольшей.

Если провести прямую l, параллельную прямой $y = \nu k$, и из точки касания C^* прямой l и функции $y = f(k)$ провести вертикальную линию, то точка пересечения этой линии с прямой $y = \nu k$ даёт искомую точку B^*, а с осью $0k$ – искомую точку k^* (см. рис. 3).

Из параллельности прямых l и $y = \nu k$ следует, что

$$\left.\frac{df(k)}{dk}\right|_{k=k^*} = \left.\frac{d(\nu k)}{dk}\right|_{k=k^*}. \tag{13}$$

Таким образом, уравнение (3) следует из (13). Из свойства 1) в (5) следует $s^* f(k^*) = \nu k^*$. Из этого соотношения получается выражение для s^* в виде (2а). Так как, согласно (3), $\nu = f'(k^*)$, то (2б) следует непосредственно из (2а). Теорема доказана.

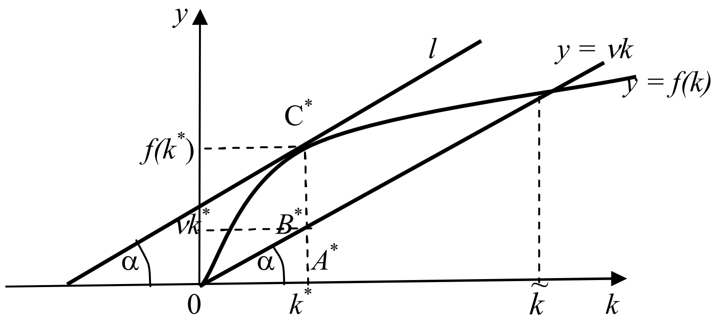

Рис. 3

Следствие. На оптимальном решении норма накопления s^* равняется коэффициенту эластичности по фондам, а норма потребления $s^* = (1 - s^*)$ – коэффициенту эластичности по трудовым ресурсам при $k = k^*$.

Доказательство. Согласно теореме 1.5 коэффициенты эластичности по фондам α и трудовым ресурсам β определяются формулами

$$\alpha = k\frac{f'(k)}{f(k)}, \quad \beta = 1 - \alpha. \tag{14}$$

Тогда сформулированное утверждение следует из (2), (14).

Утверждение 1. Если ПФ является ПФ КД, то

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ f(k) = Ak^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1. \tag{15}$$

Тогда

$$s^* = \alpha,\ k^* = \left[\frac{A\alpha}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},\ \tilde{k} = \left[\frac{A}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{16}$$

Замечание. Получить формулы (16) самостоятельно.

3.1. *Магистральные свойства*

Полученное решение на стационарных траекториях соответствует нахождению экономики на магистрали. Поскольку этому состоянию соответствует стационарное решение уравнения (2.1), то достигнуть этого состояния экономика может за достаточно большой (теоретически бесконечный) промежуток времени. Рассмотрим случай конечного промежутка времени $t \in [0, T]$, когда нахождение экономики на магистрали составляет часть промежутка $t \in [T^*, T^{**}]$. Очевидно, что $0 < T^* < T^{**} < T$. При этом возникают следующие вопросы:

1. выход экономики на магистраль, когда траектория $k(t)$ с начального значения $k(0) = k_0$ достигает за время T^* значения $k(T^*) = k^*$, определенного в теореме 2;
2. сход экономики с магистрали, когда за время $\widetilde{T} = T - T^{**}$ траектория $k(t)$ достигает для обеспечения условия экономического горизонта значения $k(T) = k_{\text{Т}}$.

Исходя из смысла экономического развития наложим условие

$$k_0 < k^* < k_{\text{Т}}. \tag{17}$$

Тогда из (2.1) следует, что

$$T^* = \int_{k_0}^{k^*} \frac{dk}{sf(k) - vk}, \quad T^{**} = T - \widetilde{T} = T - \int_{k^*}^{k_T} \frac{dk}{sf(k) - vk}. \tag{18}$$

Так как время нахождения экономики на магистрали $T_m = T^* - T^* > 0$, то рассмотренная схема справедлива при выполнении условия

$$T > T^* + \widetilde{T}, \tag{19}$$

где $\widetilde{T}$ – время схода экономики с магистрали. При этом встает вопрос о выборе значения параметра нормы накопления s. Исходя из условия (17) при этом должно выполняться условие $\dot{k}(t) > 0$, т.е., согласно (1.1), задача выхода экономики на магистраль и ее схода с магистрали выполнима для значений фондовооружённости и значений нормы накопления s, удовлетворяющих условию

$$sf(k) > vk. \tag{20}$$

Полагая в (20) $k = k^*$, получаем с учётом (20), (2) и (3), что параметр s должен удовлетворять условию $s > s^*$.

Выводы: 1) на интервалах времени соответственно выхода экономики на магистраль и её схода с магистрали норма накопления s должна быть больше нормы накопления s^* на магистрали; 2) минимизация времени выхода экономики на магистраль T^* и времени схода экономики с магистрали $\widetilde{T}$, т.е. максимизация времени нахождения экономики на магистрали $T_m = T^{**} - T^*$, достигается при $s = 1$, когда на интервалах времени $t \in [0, T^*]$ и $t \in [T^{**}, T]$ весь произведённый продукт идёт на накопление.

Утверждение 2. Если ПФ является ПФ КД, т.е. имеет вид (15), то:

$$T^* = \frac{1}{v(1-\alpha)} \ln \frac{sA - vk_0^{1-\alpha}}{sA - v(k^*)^{1-\alpha}},$$

$$\widetilde{T} = \frac{1}{v(1-\alpha)} \ln \frac{sA - v(k^*)^{1-\alpha}}{sA - vk_T}; \tag{21}$$

$$k(t) = \left[\frac{sA - [sA - vk_0^{1-\alpha}]\exp\{-v(1-\alpha)t\}}{v} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$=\left[\frac{sA-[sA-v(k^*)^{1-\alpha}]\exp\{v(1-\alpha)(T^*-t)\}}{v}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (22)$$

$$t\in[0,T^*];$$

$$k(t)=\left[\frac{sA-[sA-vk_T^{1-\alpha}]\exp\{v(1-\alpha)(T-t)\}}{v}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}=$$

$$=\left[\frac{sA-[sA-v(k^*)^{1-\alpha}]\exp\{-v(1-\alpha)(t-T^{**}\}}{v}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (23)$$

$$t\in[T^{**},T];$$

условие (19) имеет вид

$$T>\frac{1}{v(1-\alpha)}\ln\frac{sA-vk_0^{1-\alpha}}{sA-vk_T^{1-\alpha}}; \qquad (24)$$

для s должно выполняться условие $s>\alpha$.

Замечание. Утверждение 2 доказать самостоятельно. Формулы (22), (23) получены как решения уравнения (1.16) для функции *f(k)* вида (15) на интервале $t\in[0,T^*]$ при $k(0) = k_0$ и $k(T^*) = k^*$ и на интервале $t\in [T^{**},T]$ при $k(T) = k_T$ и $k(T^{**}) = k^*$. Убедиться, что в результате использования формул (21) в (22), (23) действительно получается, что $k(T^*) = k^*$, $k(T^{**}) = k^*$.

§4. Экономический рост при оптимальном решении

Так как $K(t) = k(t)L(t)$, то уровень ОФ $K^*(t)$, соответствующий оптимальному значению фондовооружённости $k = k^*$, будет определяться, согласно (1.13), формулой

$$K^*(t) = k^*L_0e^{\lambda t} = K_0{}^*e^{\lambda t},\ K_0{}^* = k^*L_0. \qquad (1)$$

Таким образом, при оптимальном решении рост ОФ происходит по экспоненциальному закону с коэффициентом λ в темпе роста ТР.

Поскольку средняя производительность труда $y(t) = f(k(t))$ (см. (1.8)), то

$$y^* = f(k^*), \tag{2}$$

т.е. на оптимальном решении средняя производительность труда постоянна во времени и равна $f(k^*)$.

Пусть $Y^*(t)$ – уровень ВП, достигаемый на оптимальном решении. Тогда, согласно (1.1), (1.13), (1),

$$Y^*(t) = F(K^*(t), L(t)) = F(K_0^* e^{\lambda t}, L_0 e^{\lambda t}). \tag{3}$$

Условием НТП на оптимальном решении является условие $\frac{dY^*}{dt} > 0$. Тогда, согласно (3),

$$\frac{dY^*(t)}{dt} = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)} \frac{dK^*(t)}{dt} + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L(t)} \frac{dL(t)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)} K_0^* \lambda e^{\lambda t} + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L(t)} \lambda L_0 e^{\lambda t} =$$

$$= \lambda e^{\lambda t} \left[\frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K_0^* + \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L_0 \right]. \tag{4}$$

Так как $\lambda > 0$, $L_0 > 0$, $K_0^* > 0$ и по НКУ $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$, то из (4) следует, что

$$\frac{dY^*(t)}{dt} > 0. \tag{5}$$

Вывод. На оптимальном решении обеспечивается устойчивый экономический рост.

Определение. Если при экономическом росте, т.е. при росте ВП во времени, выполняется условие

$$k(t) \equiv k = \text{const}, \; y(t) \equiv \text{const}, \tag{6}$$

т.е. фондовооружённость и средняя производительность труда являются константами, не зависящими от времени, то такой экономический рост называется равновесным.

Формула (4) может быть переписана в виде

$$\frac{dY^*(t)}{dt} = \lambda\left[\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)}K^*(t) + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L(t)}L(t)\right]. \qquad (7)$$

Введём величину относительной скорости роста ВП

$$\hat{Y}^*(\mathrm{t}) = \frac{dY^*(t)}{dt}\frac{1}{Y^*(t)} = \frac{dY^*(t)}{dt}\frac{1}{F(K^*(t),L(t))}. \qquad (8)$$

Очевидно, что если выполняется (5), то выполняется условие

$$\hat{Y}^*(t) > 0 \qquad (9)$$

как условие устойчивого экономического роста. Так как, согласно главе 1,

$$\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K}\frac{K}{F(\cdot)} = \alpha, \quad \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L}\frac{L}{F(\cdot)} = \beta \qquad (10)$$

и при этом сумма коэффициентов эластичности α и β равна единице, то после деления левой и правой части формулы (7) на $F(K^*(t),L(t))$ получаем, согласно (8), что

$$\hat{Y}^*(t) = \lambda. \qquad (11)$$

Подводя итоги проведённому исследованию, сформулируем следующий результат.

Теорема 3. На оптимальном в смысле максимизации потребления решении при экспоненциальном росте ТР с темпом λ обеспечивается равновесный рост, при котором $k(t) \equiv k^*$, $y(t) \equiv y^* = f(k^*)$. При этом относительная скорость роста ВП $\hat{Y}^*(\mathrm{t}) \equiv \hat{Y}^* = \lambda$.

§5. Золотое правило накопления (ЗПН)

Из (3.2) следует

$$s^*f(k^*) = k^*f'(k^*). \qquad (1)$$

Так как

$$k^* = \frac{K^*(t)}{L(t)}, f(k^*) = \frac{F(K^*(t), L(t))}{L(t)},$$

$$f'(k^*) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)}, \qquad (2)$$

то из (1) и (2) следует, что

$$s^* F(K^*(t), L(t)) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t). \qquad (3)$$

С точки зрения потребления весь ВП делится, в соответствии с (1.1), (1.2), на накопление $I(t) = sY(t)$ и потребление $C(t) = (1 - s)Y(t)$, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(\mathrm{t}) = sF(K(t), L(t)) + (1 - s)F(K^*(\mathrm{t}), L(\mathrm{t})). \qquad (4)$$

На оптимальном решении

$$Y^*(t) = I^*(t) + C^*(t), \qquad (5)$$

где

$$I^*(t) = s^* F(K^*(t), L(t)),\ C^*(t) = (1 - s^*)F(K^*(\mathrm{t}), L(t)). \qquad (6)$$

С точки зрения производства ВП $Y(t)$ имеет представление $Y(t) = Y_K(t) + Y_L(t)$, где $Y_K(t)$ – часть ВП, произведённая за счёт ОФ $K(t)$, а $Y_L(t)$ – часть ВП, произведённая за счёт ТР $L(t)$. По теореме Эйлера (см. главу 1):

$$Y(t) = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial K} K + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L} L, \qquad (7)$$

где $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K} K$ и $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L} L$ представляют собой доход с ОФ и доход с ТР, соответственно. Таким образом,

$$Y_K(t) = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial K} K, \quad Y_L(t) = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L} L. \qquad (8)$$

На оптимальном решении

$$Y^*(t) = Y_K^*(t) + Y_L^*(t) =$$
$$= \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t) + \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L(t). \quad (9)$$

Из (3) и (6) следует

$$I^*(t) = s^* F(K^*(t), L(t)) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t). \quad (10)$$

Из (5), (6), (9), (10) следует, что

$$C^*(t) = (1 - s^*) F(K^*(t), L(t)) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L(t). \quad (11)$$

Таким образом, согласно (9) – (11),

$$I^*(t) = Y_K^*(t), \quad C^*(t) = Y_L^*(t). \quad (12)$$

Данный результат известен как «Золотое правило накопления». Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 4. На оптимальном в смысле максимума потребления решении, обеспечивающем равновесный рост экономики, доход с капитала направляется на накопление, а доход с трудовых ресурсов направляется на потребление.

Задачи.

1. Провести полное исследование полученных результатов для случая ПФ Кобба – Дугласа.
2. Провести полное исследование полученных результатов для случая CES-ПФ ($\gamma = 1$).

§6. Максимизация потребления работодателей

Усложним проблему введением в постановку задачи условия того, что и работодатель, понимаемый в рамках макроэкономики как совокупный (обобщённый) работодатель, также потребляет часть ВВП. Возникающие при этом основные вопросы:

1. в каких пропорциях должен делиться ВВП;

2. возможен ли при этом экономический рост;

3. может ли работодатель потреблять больше, чем наёмные рабочие.

6.1. *Математическая модель*

Пусть, как и при рассмотрении предыдущей проблемы,

$$Y(t) = F(K(t),L(t)), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $F(\cdot)$ – ЛОПФ, а

$$L(t) = L_0 e^{\lambda t}, L_0 > 0, \lambda > 0. \tag{2}$$

Пусть весь ВП $Y(t)$ делится на три части в виде

$$Y(t) = I(t) + C_K(t) + C_L(t), \tag{3}$$

где $I(t)$ – инвестиции (накопление), $C_K(t)$ – потребление работодателей, $C_L(t)$ – потребление наёмных работников. Пусть s_1 – норма накопления, s_2 – норма потребления работодателей, а $\widetilde{s} = 1 - s_1 - s_2$ является нормой потребления наёмных работников. Тогда

$$I(t) = s_1 Y(t), C_K(t) = s_2 Y(t), C_L(t) = (1- s_1- s_2)Y(t), \tag{4}$$

$$0 \leq s_1 \leq 1, 0 \leq s_2 \leq 1, 0 < s_1 + s_2 \leq 1, s_1 + s_2 + \widetilde{s} = 1, \tag{5}$$

т.е.

$$\begin{aligned} F(K(t),L(\mathrm{t})) &= s_1 F(K(t),L(t)) + s_2 F(K(t),L(t)) + \\ &+ (1 - s_1 - ыs_2)F(L(t),L(t)) = s_1 F(K(t),L(t)) + \\ &+ t_2 F(K(t),L(t)) + \widetilde{s}\, F(K(t),L(t)) = \\ &= sF(K(e),L(t)) + \widetilde{s}\, F(K(t),L(t)), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$s = s_1 + s_2, \ \widetilde{s} = 1 - s = 1 - s_1 - s_2 \tag{7}$$

и являются, соответственно, совокупной нормой накопления и потребления работодателей и нормой потребления наёмных работников.При этом

$$s + \widetilde{s} = 1. \tag{8}$$

Аналогично рассмотрению предыдущей проблемы для ОФ $K(t)$ имеет место дифференциальное уравнение

$$\dot{K}(t) = s_1 F(K(t),L(t)) - \mu K(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

где $\mu > 0$ – коэффициент амортизации ОФ. Считаем, что выполняется основное условие *теории предельной трудовой стоимости* (*предельной производительности труда*), когда

$$C_L(t) = \frac{\partial F(K(t),L(t))}{\partial L(t)} L(t) = Y_L(t), \qquad (10)$$

т.е. потребление наемных работников осуществляется только за счет ВП, произведенного их трудом. Поскольку $C_K(t) = s_2 F(K(t),L(t))$, то задача максимизации потребления работодателей ставится следующим образом: при заданном изменении ТР $L(t)$ в виде (2) и изменении ОФ $K(t)$ в соответствии с дифференциальным уравнением (9) и ограничении (10) найти такие значения параметров s_1 и s_2, удовлетворяющих условиям (5), чтобы величина потребления работодателей $C_K(t)$ достигала максимального значения. Таким образом, критерий оптимальности имеет вид

$$C_K(t) = s_2 F(K(t),L(t)) \Rightarrow \max. \qquad (11)$$

Модифицируем постановку задачи, введя в рассмотрение

$$\left.\begin{aligned} &k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, c_k(t) = \frac{C_K(t)}{L(t)}, c_L(t) = \frac{C_L(t)}{L(t)}, \\ &f(k(t)) = \frac{F(K(t),L(t))}{L(t)}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

т.е. фондовооруженность $k(t)$, удельные потребления работодателей $c_k(t)$ и наемных работников $c_L(t)$, среднюю производительность труда $y(t) = f(k(t))$. Делением (3) на $L(t)$ получим с учетом (6) и (12), что

$$\begin{aligned} y(t) &= i(t) + c_K(t) + c_L(t) = \\ &= s_1 f(k(t) + s_2 f(k(t)) + (1 - s_1 - s_2) f(k(t)) = \\ &= s_1 f(k(t)) + s_2 f(k(t)) + \tilde{s} f(k(t)). \end{aligned} \qquad (13)$$

Аналогично (1.16) получим, что $k(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{k}(t) = s_1 f(k(t)) - \nu k(t), t \geq 0, \qquad (14)$$

$$\nu = \mu + \lambda,\ \mu > 0,\ \lambda > 0. \qquad (15)$$

Делением (11) на $L(t)$ получаем в соответствии с (12)

$$c_K(t) = s_2 f(k(t)) \Rightarrow \max. \qquad (16)$$

Аналогично после деления (10) на $L(t)$ следует, что

$$c_L(t) = \frac{\partial F(K(t), L(t))}{\partial L(t)}\ , \qquad (17)$$

С учетом (12)

$$\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L} = \frac{\partial [Lf(k)]}{\partial L} = f(k) + L\frac{\partial f(k)}{\partial L} = f(k) + L\frac{\partial f(k)}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial L} =$$

$$= f(k) + f'(k)\frac{\partial [K/L]}{\partial L} L = f(k) - f'(k)\frac{K}{L^2} L = f(k) - f'(k)\frac{K}{L}.$$

Итак,

$$\frac{\partial F(K(t), L(t))}{\partial L(t)} = f(k(t)) - k(t) f'(k(t)). \qquad (18)$$

Тогда из (13), (17), (18) следует, что условие (10) принимает вид

$$(1 - s_1 - s_2) f(k(t)) = f(k(t)) - k(t) f'(k(t)). \qquad (19)$$

Итак, пришли к следующей задаче: при изменении фондовооруженности $k(t)$ в соответствии с дифференциальным уравнением (14) и при выполнении условия (19) найти такие значения параметров s_1 и s_2, чтобы величина удельного (относительно ТР $L(t)$) потребления работодателей $c_K(t)$ достигала максимального значения, т.е. чтобы выполнялось условие (16).

6.2. *Решение задачи на стационарных траекториях*

Каждому значению параметра $s_1 \in (0,1)$ соответствует своя траектория дифференциального уравнения (14) при условиях (15) и некотором начальном условии $k(0) = k_0$, которую обозначим $k_s(t)$.

Определение. Стационарное значение $k_s(t) \equiv k_s = \text{const}$, как функция параметра s, называется стационарной траекторией.

Теорема 5. Стационарная траектория k_s является единственным корнем уравнения

$$s_1 f(k) - \nu k = 0, \qquad (20)$$

причём $k_s > 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.1.

Поставленную в 6.1 задачу будем решать на стационарных траекториях: для значений k_s, удовлетворяющих условию (20) и условию (19):

$$(1 - s_1 - s_2)f(k_s) = f(k_s) - k_s f'(k_s), \qquad (21)$$

найти такие значения параметров

$$s_1 = s_1^*,\ s_2 = s_2^*,\ \tilde{s} = \tilde{s}^* = 1 - s_1 - s_2^*, \qquad (22)$$

удовлетворяющих условиям (5), чтобы выполнялось условие оптимальности в смысле критерия

$$c_k(s) = s_2 f(k_s) \to \max. \qquad (22)$$

Теорема 6. Пусть для $f(k)$ выполняются неоклассические условия:

1. $f(k) > 0,\ k > 0;\ f(k) = 0,\ k = 0;$
2. $f'(k) > 0,\ f''(k) < 0;$
3. $\lim f'(k) = \infty$ при $k \downarrow 0$;
4. $\lim f'(k) = 0$ при $k \uparrow \infty$.

Пусть, кроме того, дополнительно выполняются следующие условия:

5. $f'''(k) > 0;$
6. $\lim kf''(k) \uparrow 0$ при $k \uparrow \infty$; (23)
7. $f'(k) > k|f''(k)|;$ (24)
8. $2f''(k) + kf'''(k) < 0.$ (25)

Тогда:

1) оптимальные значения s_1^*, s_2^* и $\tilde{s}^*$, соответственно нормы накопления, нормы потребления работода-

телей и нормы потребления наёмных работников, определяются в виде

$$s_1^* = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} + \frac{(k^*)^2 f''(k^*)}{f(k^*)} =$$

$$= \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - \frac{(k^*)^2 \left| f''(k^*) \right|}{f(k^*)}, \qquad (26)$$

$$s_2^* = -\frac{(k^*)^2 f''(k^*)}{f(k^*)} = \frac{(k^*)^2 \left| f''(k^*) \right|}{f(k^*)}, \qquad (27)$$

$$\tilde{s}^* = 1 - s_1^* - s_2^* = 1 - \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}; \qquad (28)$$

2) оптимальное значение фондовооружённости k^* является единственным корнем уравнения

$$f'(k) + kf''(k) = \nu. \qquad (29)$$

Доказательство. Из (21) следует, что

$$s_2 f(k_s) = k_s f'(k_s) - s_1 f(k_s). \qquad (30)$$

Использование (20) в (30) даёт

$$s_2 f(k_s) = k_s [f'(k_s) - \nu]. \qquad (31)$$

Таким образом, критерий оптимальности (22), согласно (31) принимает вид

$$c_K(k_s) = k_s [f'(k_s) - \nu] \Rightarrow \max. \qquad (32)$$

Необходимое условие максимума функции $c_K(k_s)$

$$dc_K(k_s)/dk_s = 0 \qquad (33)$$

имеет, согласно (32), вид

$$f'(k_s) + k_s f''(k_s) - \nu = 0. \qquad (34)$$

Таким образом, уравнение (29) следует из (34). Достаточное условие максимума

$$d^2 c_K(k_s)/dk_s^2 < 0, \qquad (35)$$

согласно (34) имеет вид

$$2f''(k_s) + k_s f'''(k_s) < 0. \qquad (36)$$

Условие (25) обеспечивает выполнение (36). Пусть

$$\varphi(k) = f'(k) + kf''(k), \tag{37}$$

т.е. $\varphi(k)$ обозначает левую часть уравнения (29). Тогда, используя (25), получаем, что

$$\varphi'(k) = 2f''(k) + kf'''(k) < 0, \tag{38}$$

т.е. функция $\varphi(k)$ является монотонно убывающей функцией. Из условий 2) – 5) теоремы 6 следует, что

$$\lim_{k \downarrow 0} \varphi(k) = \infty, \quad \lim_{k \uparrow \infty} \varphi(k) = 0. \tag{39}$$

Так как, согласно (24), $\varphi(k) > 0$, и $\nu > 0$, то монотонное убывание $\varphi(k)$ совместно со свойствами (39) обеспечивает единственность корня уравнения (29).

Как и при доказательстве теоремы 3.2 должно выполняться условие для k_s вида

$$k_s < \tilde{k}\ , \tag{40}$$

где $\tilde{k}$ является единственным корнем уравнения

$$f(k) = \nu k. \tag{41}$$

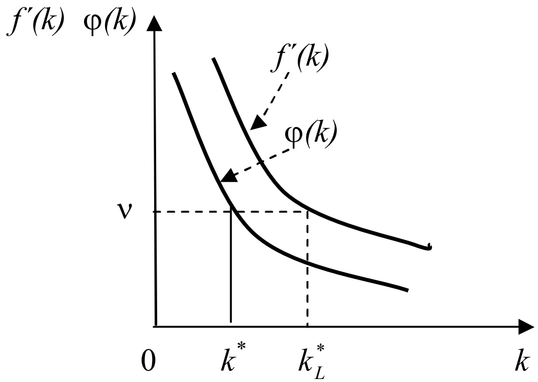

Рис. 4

Поскольку корень k_L^* уравнения (см. (3.3))

$$f'(k) = \nu \tag{42}$$

обладает свойством $k_L^* < \tilde{k}$, то тем более таким свойством, с учётом 2) – 6), (39) будет обладать корень уравнения (29) (см. рис.4). Таким образом

$$0 < k^* < k_L^* < \tilde{k}\,, \qquad (43)$$

т.е. действительно единственный корень k^* уравнения (29) принадлежит стационарным траекториям.

Из (20) следует, что

$$s_1^* = \frac{\nu k^*}{f(k^*)}. \qquad (44)$$

Использование (29) при $k = k^*$ в (44) приводит к первому варианту формулы (26), а второй вариант этой формулы следует из того, что $f''(k^*) < 0$ (см. условие 2)). Из (30) следует, что

$$s_2^* = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - s_1^*. \qquad (45)$$

Использование (26) в (45) приводит к (27). Так как, согласно (22), $\tilde{s}^* = 1 - s_1^* - s_2^*$, то (28) следует из (26), (27). Теорема доказана.

***Следствие* 1**. Формулам (26), (27) эквивалентны следующие формулы

$$s_1^* = \frac{\nu k^*}{f(k^*)}, \qquad (46а)$$

$$s_2^* = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - \frac{\nu k^*}{f(k^*)}. \qquad (46б)$$

Доказательство. Из (29) следует, что

$$f''(k^*) = \frac{\nu - f'(k^*)}{k^*}. \qquad (47)$$

Использование (47) в (26) приводит к (46а), а (46б) следует из (45), (46а).

***Следствие* 2.** На оптимальном решении сумма норм накопления s_1^* и потребления работодателей s_2^*

$$s^* = s_1^* + s_2^*, \qquad (48)$$

равна коэффициенту эластичности по фондам, а норма потребления наёмных работников $\tilde{s}^*$ – коэффициенту эластичности по трудовым ресурсам при $k = k^*$:

$$s_1^* + s_2^* = \alpha(k^*) = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}, \tag{49}$$

$$\tilde{s}^* = \beta(k^*) = 1 - \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} \tag{50}$$

Доказательство. Согласно теореме 1.5 коэффициенты эластичности по фондам $\alpha(k)$ и трудовым ресурсам $\beta(k)$ определяются формулами

$$\alpha(k) \equiv \frac{kf'(k)}{f(k)}, \ \ \beta(k) = 1 - \alpha(k). \tag{51}$$

Тогда формулы (49), (50) следуют из (28), (45).

6.3. *Золотое правило накопления и экономический рост*

Так как $K(t) = k(t)L(t)$, то уровень ОФ $K^*(t)$, соответствующий оптимальному значению фондовооружённости k^*, будет определяться, согласно (2), формулой

$$K^*(t) = k^* L_0 e^{\lambda t} = K_0^* e^{\lambda t}, \ K_0^* = k^* L_0, \tag{52}$$

т.е. при оптимальном решении рост ОФ происходит по экспоненциальному закону с коэффициентом λ в темпе роста ТР. Так как средняя производительность труда $y(t) = f(k(t))$, то

$$y^* = f(k^*), \tag{53}$$

т.е. на оптимальном решении средняя производительность труда постоянна во времени.

Пусть $Y^*(t)$ – уровень ВП, достигаемый на оптимальном решении. Тогда, согласно (1), (2), (52),

$$Y^*(t) = F(K^*(t), L(t)) = F(K_0^* e^{\lambda t}, L_0 e^{\lambda t}). \tag{54}$$

Условием НТП на оптимальном решении является условие

$$\frac{dY^*(t)}{dt} > 0. \qquad (55)$$

Согласно (54)

$$\frac{dY^*(t)}{dt} = \lambda e^{\lambda t}\left[\frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K_0^* + \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L_0\right] =$$

$$= \lambda\left[\frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t) + \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L(t)\right]. \qquad (56)$$

Так как $\lambda > 0$, $L_0 > 0$, $K_0^* > 0$ и по неоклассическим условиям $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial L} > 0,$ то из (56) следует справедливость (55). Таким образом, на оптимальном решении обеспечивается устойчивый экономический рост.

Введём величину относительной скорости роста ВП

$$\hat{Y}(t) = \frac{dY^*(t)}{dt}\frac{1}{Y^*(t)} = \frac{dF(K^*(t), L(t))}{dt}\frac{1}{F(K^*(t), L(t))}. \qquad (57)$$

Так как, согласно главе 1,

$$\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K}\frac{K}{F(\cdot)} = \alpha, \quad \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L}\frac{L}{F(\cdot)} = \beta, \qquad (58)$$

где α и β – коэффициенты эластичности по ОФ и ТР и при этом $\alpha + \beta = 1$, то поделив (56) слева и справа на $F(K^*(t), L(t))$, получаем с учётом (57), (58), что

$$\hat{Y}(t) = \lambda. \qquad (59)$$

Таким образом, пришли к следующему результату.

Теорема 7. На оптимальном в смысле максимизации потребления работодателей решении при экспоненциальном росте ТР с темпом λ обеспечивается равновесный рост экономики. При этом $k(t) \equiv k^*$, $y(t) \equiv y^* = f(k^*)$ и относительная скорость роста ВП $\hat{Y}(t) = \lambda$.

Рассмотрим вопрос о том, в каких пропорциях при оптимальном решении делится ВП.

Теорема 8. Инвестиции в основные фонды плюс потребление работодателей равны доходу с ОФ, т.е.

$$(s_1^* + s_2^*)F(K^*(t), L(t)) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t). \qquad (60)$$

Потребление наёмных работников равно доходу с ТР, т.е.

$$\widetilde{s}^* F(K^*(t), L(t)) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L(t). \qquad (61)$$

Доказательство. Из (26) следует, что

$$s_1^* f(k^*) = k^* f'(k^*) - (k^*)^2 \left| f''(k^*) \right|. \qquad (62)$$

Так как

$$k^* = \frac{K^*(t)}{L(t)},\ f(k^*) = \frac{F(K^*(t), L(t))}{L(t)}, \qquad (63)$$

то

$$f'(k^*) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)}, f''(k^*) = \frac{\partial^2 F(K^*(t), L(t))}{\partial K^{*2}(t)} L(t). (64)$$

Использование (63), (64) в (62) даёт

$$s_1^* F(K^*(t), L(t)) =$$

$$= \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t) - \left| \frac{\partial^2 F(K^*(t), L(t))}{\partial K^{*2}(t)} \right| \left(K^*(t) \right)^2 . (65)$$

Из (27) следует, что

$$s_2^* f(k^*) = (k^*)^2 \left| f''(k^*) \right|. \qquad (66)$$

Использование (63), (64) в (66) даёт

$$s_2^* F(K^*(t), L(t)) = \left| \frac{\partial^2 F(K^*(t), L(t))}{\partial K^{*2}(t)} \right| (K^*(t))^2 . \qquad (67)$$

Тогда (60) следует непосредственно из (65), (67).
Из (28) следует

$$\widetilde{s}^* f(k^*) = f(k^*) - k^* f'(k^*). \qquad (68)$$

Использование (63), (64) в (68) даёт

$$\tilde{s}^* F(K^*(t), L(t)) =$$

$$= F(K^*(t), L(t)) - \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t). \qquad (69)$$

По формуле Эйлера для ЛОПФ

$$F(K^*(t), L(t)) = Y_K^* + Y_L^* =$$

$$= \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t) + \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L(t). \qquad (70)$$

Отсюда

$$F(K^*(t), L(t)) - \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t) =$$

$$= \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L(t). \qquad (71)$$

Использование (71) в (69) приводит к (61). Теорема доказана.

Вывод из доказанного результата, который представляет собой «Золотое правило накопления» в рассмотренной задаче, заключается в следующем:

1) весь валовой продукт, произведённый за счёт трудовых ресурсов, идёт на потребление наёмных работников;

2) весь валовой продукт, произведённый за счёт основных фондов, идёт на инвестиции в основные фонды и потребление работодателей.

6.4. *Случай ПФ Кобба – Дугласа*

Теорема 9. Пусть

$$F(K,L) = AK^{\alpha} L^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1, \qquad (72)$$

т.е.

$$f(k) = Ak^{\alpha}. \qquad (73)$$

Тогда

$$k^* = \left(\frac{A\alpha^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad (74)$$

$$s_1^* = \alpha^2, s_2^* = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha), \ \tilde{s}^* = 1-\alpha. \qquad (75)$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

Графики $s_1^*, s_2^*, \tilde{s}^*$ приведены на рис. 5. Кроме того, приведён график для $s^* = \alpha$, определяющий норму инвестиций в задаче максимизации C_L (см. теорему 1).

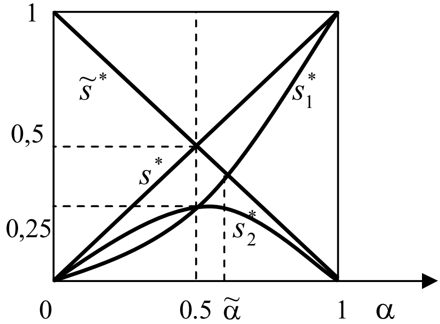

Рис.5

Комментарии к полученному решению:

1) норма потребления работодателей меньше нормы потребления наёмных работников, т.е.

$$s_2^* < \tilde{s}^*. \qquad (76)$$

Таким образом, для обеспечения сбалансированного роста в экономике, функционирующей в соответствии с ПФ КД, работодатель вынужден потреблять меньше наёмных работников.

2) $s_2^*(\alpha)$ монотонно возрастает от $s_2^*(0) = 0$ до $s_2^*(0{,}5)$ = 0,25 на интервале $\alpha \in (0;0{,}5)$ и монотонно убывает от $s_2^*(0{,}5) = 0{,}25$ до $s_2^*(1) = 0$ на интервале $\alpha \in (0{,}5;1)$.

3) $s_1^*(\alpha)$ является монотонно возрастающей функцией от $s_1^*(0)=0$ до $s_1^*(1)=1$. При этом:
$s_1^*(0{,}5)=s_2^*(0{,}5)=0{,}25$; $s_1^* < s_2^*$ для $\alpha\in(0;0{,}5)$; $s_1^* > s_2^*$ для $\alpha\in(0{,}5;1)$. Таким образом, в области $\alpha\in(0{,}5;1)$ дефицита ОФ капиталист вынужден потреблять меньше, чем инвестировать в развитие ОФ.

4) $\tilde{s}^*(\alpha)$ является монотонно убывающей функцией от $\tilde{s}^*(0)=1$ до $\tilde{s}^*(1)=0$, т.е. в области избытка ОФ на потребление наёмных работников идёт значительная часть ВП, а по мере роста дефицита ОФ норма потребления наёмных работников уменьшается в связи с ростом нормы инвестиций. При этом: $\tilde{s}^*(\tilde{\alpha})=s_1^*(\tilde{\alpha})$, где $\tilde{\alpha}=(\sqrt{5}-1)/2\cong 0{,}612$; $\tilde{s}^* > s_1^*$ для $\alpha\in(0;\tilde{\alpha})$; $\tilde{s}^* < s_1^*$ для $\alpha\in(\tilde{\alpha};1)$, т.е. в области существенного дефицита ОФ наёмными работниками потребляется меньше, чем инвестируется в воспроизводство ОФ.

5) В задаче максимизации потребления наёмных работников (см. следствие к теореме 2)

$$s^*=\alpha, k^*=k_L^*=\left(\frac{A\alpha}{v}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (77)$$

Из (74), (75) следует, что $s^* > s_1^*$, $k_L^* > k^*$ т.е. в задаче максимизации потребления наёмных работников значения нормы инвестиций и фондовооружённости больше, чем значения этих величин в задаче максимизации потребления работодателей. При этом $s^*=s_1^*+s_2^*$.

Все рассуждения параграфа 3.1, касающиеся магистральных свойств в задаче максимизации потребления наёмных работников, справедливы и для задачи максимизации потребления работодателей с заменой всюду s на s_1 и условия $s > s_1^*$ на условие $s_1 > s_1^*$.

Глава 4. Максимизация потребления и экономический рост в двухсекторной экономике

§1. Математическая модель

Считаем, что экономика разбита на два сектора: 1-й сектор – это производство средств производства (основных фондов); 2-й сектор – это производство предметов потребления (потребительских благ). Основные предположения заключаются в следующем.

1) Общие трудовые ресурсы $L(t)$ имеют, как и в случае односекторной экономики, рассмотренном в предыдущей главе, экспоненциальный закон, т.е.

$$L(t) = L_0\, e^{\lambda t}\,,\ L_0 > 0,\ \lambda > 0. \tag{1}$$

2) Общие трудовые ресурсы $L(t)$ делятся между секторами на $L_1(t)$ и $L_2(t)$ в виде

$$L(t) = L_1(t) + L_2(t) \tag{2}$$

в соответствии с нормами использования q и

$$\widetilde{q} = (1 - q),\ \text{т.е. } L_1(t) = qL(t) = qL_0\, e^{\lambda t},$$

$$L_2(t) = (1\;\; q)L(t) = (1 - q)L_0\, e^{\lambda t}, \tag{3}$$

$$0 < q < 1. \tag{4}$$

3) Выпуск ВП в первом секторе $Y_1(t)$ происходит в соответствии с ПФ $F(K_1(t),L_1(t))$, т.е.

$$Y_1(t) = F_1(K_1(t),L_1(t)). \tag{5}$$

4) Выпуск ВП во втором секторе $Y_2(t)$ происходит в соответствии с ПФ $F_2(K_2(t),L_2(t))$, т.е.

$$Y_2(t) = F_2(K_2(t),L_2(t)). \tag{6}$$

5) Валовой продукт первого сектора используется только на инвестиции $I_1(t)$ и $I_2(t)$ соответственно в первый и второй секторы в соответствии с нормами инвестиций s и $\widetilde{s} = 1 - s$, т.е.

$$Y_1(t) = I_1(t) + I_2(\mathrm{t}) =$$

$$= sF_1(K_1(t),L_1(t)) + (1 - s)\,F_1(K_1(t),L_1(t)), \quad (7)$$

$$0 < s < 1. \quad (8)$$

6) Валовой продукт второго сектора используется только на потребление, т.е.

$$C(t) = Y_2(t) = F_2(K_2(t),L_2(t)). \quad (9)$$

7) ПФ $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$ являются линейно однородными.

8) Амортизация основных фондов обоих секторов экономики происходит с одним коэффициентом $\mu > 0$.

Тогда рассуждения, аналогичные тем, которые привели к уравнению (3.1.6), дают следующие дифференциальные уравнения для $K_1(t)$и $K_2(t)$:

$$\dot{K}_1(t) = sF_1(K_1(t),L_1(t)) - \mu K_1(t), \quad (10)$$

$$\dot{K}_2(t) = (1-s)F_1(K_1(t),L_1(t)) - \mu K_2(t),\ t \geq 0. \quad (11)$$

Задача. При заданном изменении общих ТР $L(t)$ в виде (3) и изменении ОФ $K_1(t)$ и $K_2(t)$ в обоих секторах экономики в соответствии с дифференциальными уравнениями (10), (11) найти такой закон распределения ВП первого секторы на инвестиции в первый и второй сектора и такой закон распределения ТР между первым и вторым секторами, т.е. такие значения параметров s и q, чтобы величина потребления достигала максимального значения. Таким образом, критерий оптимальности имеет вид

$$C(t) = F_2(K_2(t),L_2(t)) \Rightarrow \max_{\{0<s<1;\,0<q<1\}}. \quad (12)$$

Модифицируем постановку задачи введением в рассмотрение удельных величин

$$k_1(t) = \frac{K_1(t)}{L_1(t)},\ k_2(t) = \frac{K_2(t)}{L_2(t)},$$

$$f_1(k_1(t)) = \frac{F_1(K_1(t),L_1(t))}{L_1(t)},$$

$$f_2(k_2(t)) = \frac{F_2(K_2(t), L_2(t))}{L_2(t)},$$

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} = \frac{F_2(K_2(t), L_2(t))}{L(t)}, \tag{13}$$

где $k_1(t)$ и $k_2(t)$ – фондовооружённость в первом и втором секторах, $c(t)$ – потребление на единицу трудовых ресурсов (удельное потребление),

$$y_1(te) = f_1(k_1(t)),\ y_2(t) = f_2(k_2(t)) \tag{14}$$

есть средняя производительность труда в первом и втором секторах. Делением (10) на $L_1(t)$ с учётом (13) получаем

$$\frac{\dot{K}_1(t)}{L_1(t)} = sf_1(k_1(t)) - \mu k_1(t). \tag{15}$$

Так как

$$\dot{k}_1(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{K_1(t)}{L_1(t)}\right] = \frac{\dot{K}_1(t)}{L_1(t)} - \frac{K_1(t)}{L_1^2(t)}\dot{L}_1(t) =$$

$$= \frac{\dot{K}_1(t)}{L_1(t)} - k_1(t)\frac{\dot{L}_1(t)}{L_1(t)}, \tag{16}$$

то из (15) и (16) следует

$$\dot{k}_1(t) = sf_1(k_1(t)) - \mu k_1(t) - \frac{\dot{L}_1(t)}{L_1(t)}k_1(t) =$$

$$= sf_1(k_1(t)) - \left(\mu + \frac{\dot{L}_1(t)}{L_1(t)}\right)k_1(t)\ . \tag{17}$$

Согласно (1), (3)

$$\frac{\dot{L}_1(t)}{L_1(t)} = \frac{q\,\dot{L}(t)}{qL(t)} = \frac{\lambda L_0 e^{\lambda t}}{L_0 e^{\lambda t}} = \lambda\ . \tag{18}$$

Таким образом, уравнение (17) принимает вид

$$\dot{k}_1(t) = sf_1(k_1(t)) - (\mu + \lambda)k_1(t). \tag{19}$$

После деления (11) на $L_2(t)$ получаем, с учётом (13),

$$\frac{\dot{K}_2(t)}{L_2(t)} = (1-s)\frac{F_1(K_1(t), L_1(t))}{L_2(t)} - \mu k_2(t). \tag{20}$$

Из (3) следует, что

$$L_2(t) = \frac{(1-q)}{q} L_1(t). \tag{21}$$

Тогда, с учётом (13),

$$\frac{F_1(K_1(t), L_1(t))}{L_2(t)} = \frac{q}{(1-q)} \frac{F_1(K_1(t), L_1(t))}{L_1(t)} =$$

$$= \frac{q}{(1-q)} f_1(k_1(t)). \tag{22}$$

Подстановка (22) в (20) даёт

$$\frac{\dot{K}_2(t)}{L_2(t)} = \frac{q(1-s)}{(1-q)} f_1(k_1(t)) - \mu k_2(t). \tag{23}$$

Так как

$$\dot{k}_2(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{K_2(t)}{L_2(t)}\right] = \frac{\dot{K}_2(t)}{L_2(t)} - \frac{K_2(t)}{L_2^2(t)} \dot{L}_2(t) =$$

$$= \frac{\dot{K}_2(t)}{L_2(t)} - k_2(t)\frac{\dot{L}_2(t)}{L_2(t)}, \tag{24}$$

то из (23), (24) следует

$$\dot{k}_2(t) = \frac{q(1-s)}{(1-q)} f_1(k_1(t)) - \mu k_2(t) - \frac{\dot{L}_2(t)}{L_2(t)} k_2(t) =$$

$$= \frac{q(1-s)}{(1-q)} f_1(k_1(t)) - \left(\mu + \frac{\dot{L}_2(t)}{L_2(t)}\right) k_2(t). \tag{25}$$

Согласно (1), (3)

$$\frac{\dot{L}_2(t)}{L_2(t)} = \frac{(1-q)\dot{L}(t)}{(1-q)L(t)} = \frac{\lambda L_0 e^{\lambda t}}{L_0 e^{\lambda t}} = \lambda. \tag{26}$$

Таким образом, уравнение (25) принимает вид

$$\dot{k}_2(t) = \frac{q(1-s)}{(1-q)} f_1(k_1(t)) - (\mu + \lambda)k_2(t). \tag{27}$$

После деления (9) на $L(t)$ получаем, с использованием (3), (13), что

$$\frac{C(t)}{L(t)} = c(t) = \frac{F_2(K_2(t), L_2(t))}{L(t)} =$$

$$= (1-q)\frac{F_2(K_2(t), L_2(t))}{L_2(t)} = (1-q)f_2(k_2(t)). \tag{28}$$

Таким образом, критерий максимизации потребления (12) сводится к критерию максимизации удельного потребления

$$c(t) = (1-q)f_2(k_2(t)) \Rightarrow \max_{\{0<s<1;0<q<1\}} . \tag{29}$$

Итак, пришли к следующей задаче: при экспоненциальном изменении ТР вида (1) и изменении фондовооружённостей $k_1(t)$ и $k_2(t)$ первого и второго секторов экономики в соответствии с уравнениями

$$\dot{k}_1(t) = sf_1(k_1(t)) - \nu k_1(t), \tag{30}$$

$$\dot{k}_2(t) = \frac{q(1-s)}{(1-q)} f_1(k_1(t)) - \nu k_2(t), \tag{31}$$

$$t \geq 0, \nu = \mu + \lambda, \mu > 0, \lambda > 0$$

найти такие значения параметров s и q, удовлетворяющих условиям (4), (8), чтобы величина удельного потребления $c(t)$ достигала максимального значения, т.е. чтобы выполнялось условие (29).

§2. Стационарные траектории

Каждому из значений параметров s и q из интервалов $s\in(0;1)$, $q\in(0;1)$ соответствуют при некоторых начальных условиях $k_1(0) = k_1^0$, $k_2(0) = k_2^0$ свои траектории решений уравнений (1.30), (1.31), которые будем обозначать $k_1(t;s,q)$ и $k_2(t;s,q)$. Если двухсекторная экономика функционирует достаточно долго, то встаёт вопрос о существовании стационарных значений

$$k_1(t;s,q) = \text{const} = k_1(s,q),\ k_2(t;s,q) = \text{const} = k_2(s,q).$$

Определение. Стационарные значения $k_1(s,q) = \bar{k}_1$ и $k_2(s,q) = \bar{k}_2$ решений уравнений (1.30) и (1.31) будем называть стационарными траекториями.

Теорема 1. Стационарная траектория $\bar{k}_1 > 0$ является единственным корнем уравнения

$$sf_1(k_1) - \nu k = 0, \tag{1}$$

а стационарная траектория $\bar{k}_2 > 0$ определяется формулой

$$\bar{k}_2 = \frac{q(1-s)}{(1-q)}\frac{f(\bar{k}_1)}{\nu}. \tag{2}$$

Доказательство. Так как $\dot{k}_1 = 0$ при k_1 = const, то условие (1) является условием существования стационарной траектории $\bar{k}_1$. Единственность $\bar{k}_1$ доказывается аналогично доказательству единственности стационарной траектории k_s в предыдущей главе (теорема 3.1).

Так как $\dot{k}_2 = 0$ при k_2 = const, то формула (2) следует непосредственно из (1.31). Единственность $\bar{k}_2$ очевидна.

§3. Решение задачи на стационарных траекториях

Поставленную в §1 задачу будем решать на стационарных траекториях: найти значения $s = s^*$, $q = q^*$ и соответствующие значения $\bar{k}_1 = k_1^*$, $\bar{k}_2 = k_2^*$ из условия

$$c = (1-q)f(\bar{k}_2) \Rightarrow \max_{\{0<s<1;0<q<1\}}. \tag{1}$$

Теорема 2. Оптимальные значения s^* и q^* определяются формулами

$$s^* = \frac{k_1^* f_1'(k_1^*)}{f_1(k_1^*)}, \tag{2а}$$

$$q^* = \frac{k_2^* f_2'(k_2^*)}{f_2(k_2^*)}, \tag{2б}$$

где соответствующие оптимальные значения k_1^* и k_2^* фондовооружённостей k_1 и k_2 являются единственными корнями уравнений

$$f_1'(k_1) = \nu, \tag{3}$$

$$\left(\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)} - k_2\right) = \frac{(1-s^*)f_1(k_1^*)}{\nu}. \tag{4}$$

Доказательство. Построим графики функций $y = f_1(k_1)$ и $y = \nu k_1$ с учётом свойств $f_1(k_1)$, где $\tilde{k}_1$ есть единственный корень уравнения

$$f_1(k_1) = \nu k_1, \tag{5}$$

а $\bar{k}_1$ – некоторая стационарная траектория (см. рис. 1). Свойство $\bar{k}_1 < \tilde{k}_1$ доказывается аналогично соответствующему свойству в предыдущей главе. При этом прямая l_1 параллельна прямой $y = \nu k_1$.

Поскольку $\mathrm{tg}\alpha = (\nu k_1)' = \nu$, то очевидно, что уравнение прямой l_1 имеет вид

$$y = f_1(\bar{k}_1) + \nu(k_1 - \bar{k}_1). \qquad (6)$$

Тогда из (6) следует, что

$$\left|OB_1\right| = y(0) = f_1(\bar{k}_1) - \nu\bar{k}_1. \qquad (7)$$

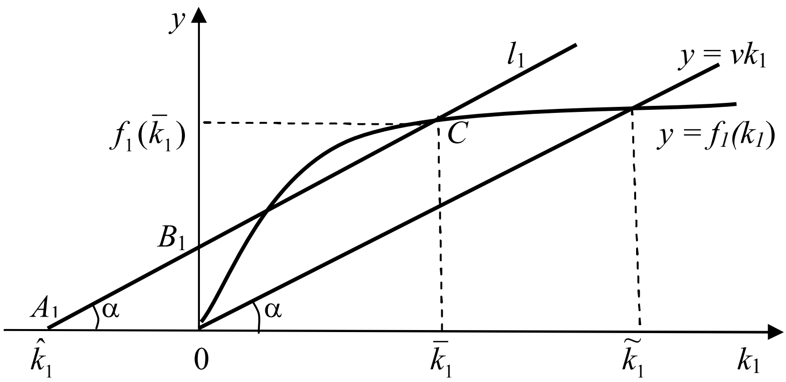

Рис. 1

Поскольку, согласно формуле (1) в §2,

$$\nu\bar{k}_1 = sf_1(\bar{k}_1), \qquad (8)$$

то из (7) и (8) следует, что

$$|OB_1| = (1-s)f_1(\bar{k}_1). \qquad (9)$$

Согласно (6) и рис. 1

$$y(\hat{k}_1) = 0 = f_1(\hat{k}_1) + \nu(\hat{k}_1 - \bar{k}_1). \qquad (10)$$

Отсюда

$$\hat{k}_1 = \bar{k}_1 - \frac{f_1(\bar{k}_1)}{\nu}. \qquad (11)$$

Использование (8) в (11) даёт

$$\hat{k}_1 = \frac{(s-1)f_1(\bar{k}_1)}{\nu}. \qquad (12)$$

Поскольку $\hat{k}_1 < 0$, а $0 < s < 1$, то из (12), согласно рис. 1, следует

$$\left|OA_1\right| = \frac{(1-s)f_1(\bar{k}_1)}{\nu}. \qquad (13)$$

Построим график функции $y = f_2(k_2)$ (рис. 2), где $\bar{k}_2$ – некоторая стационарная траектория, откладывая влево от начала координат отрезок OA_2 такой, что

$$\left| OA_2 \right| = \left| OA_1 \right| . \tag{14}$$

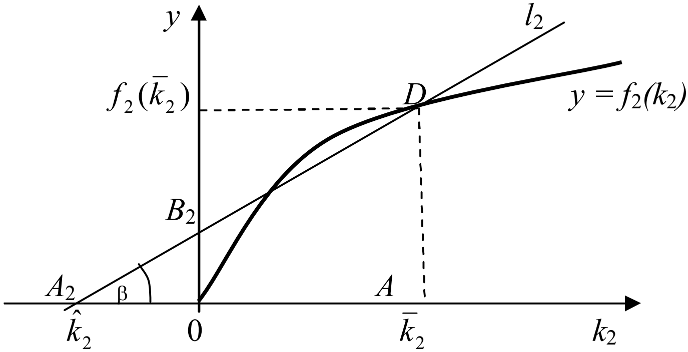

Рис. 2

Из подобия треугольников A_2OB_2 и A_2AD следует

$$\frac{|AD|}{|OB_2|} = \frac{|AA_2|}{|OA_2|} = \frac{|OA_2| + \bar{k}_2}{|OA_2|} = 1 + \frac{\bar{k}_2}{|OA_2|}. \tag{15}$$

Отсюда

$$|OB_2| = |AD| \left(1 + \frac{\bar{k}_2}{|OA_2|} \right)^{-1} = f_2(\bar{k}_2) \left(1 + \frac{\bar{k}_2}{|OA_2|} \right)^{-1}. \tag{16}$$

Из (13), (14) следует

$$\frac{\bar{k}_2}{|OA_2|} = \frac{\bar{k}_2}{|OA_1|} = \frac{\nu \bar{k}_2}{(1-s) f_1(\bar{k}_1)}. \tag{17}$$

Использование (1), (2) из §2 в (17) даёт

$$\frac{\bar{k}_2}{|OA_2|} = \frac{\nu q (1-s) f_1(\bar{k}_1)}{(1-q)(1-s) f_1(\bar{k}_1) \nu} = \frac{q}{(1-q)}. \tag{18}$$

Отсюда

$$1 + \frac{\bar{k}_2}{|OA_2|} = \frac{1}{(1-q)}. \tag{19}$$

Подстановка (19) в (16) даёт

$$\left|OB_2\right| = (1-q)f_2(\bar{k}_2). \qquad (20)$$

Из (1) и (20) следует, что задача максимизации удельного потребления c свелась к задаче поиска среди стационарных траекторий $\{\bar{k}_1;\bar{k}_2\}$ такой траектории $\{k_1^*;k_2^*\}$, для которой отрезок OB_2 имеет наибольшую длину.

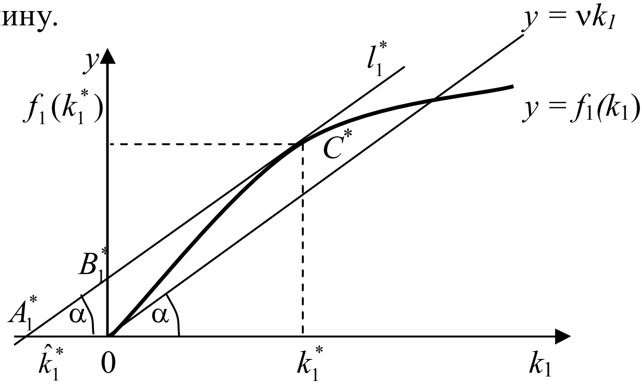

Рис. 3

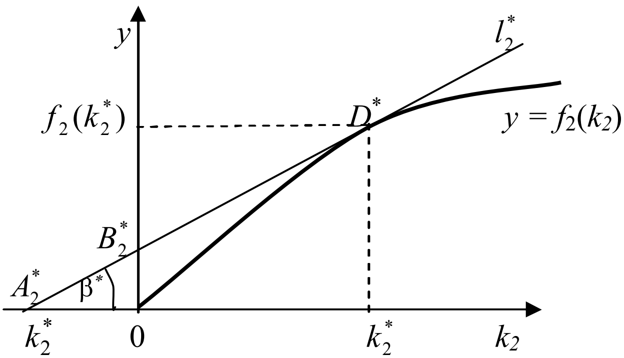

Рис. 4

Из рис. 2 следует, что максимальное увеличение $|OB_2|$ возможно за счёт увеличения угла β до тех пор пока прямая l_2 не станет касательной к кривой $y = f_2(k_2)$, и за счёт увеличения $|OA_2|$, т.е. согласно (14), $|OA_1|$ путём параллельного переноса прямой l_1 до тех пор, пока она не станет касательной к кривой $y = f_1(k_1)$. Эти преобразования изображены на рис. 3, 4. Значения $\bar{k}_1 = k_1^*$ и $\bar{k}_2 = k_2^*$ будут искомыми оптимальными значениями фондовооружённости.

Поскольку тангенс угла наклона касательной l_1^* к кривой $y = f_1(k_1)$ в точке C^* совпадает с тангенсом угла наклона прямой $y = \nu k_1$, то из этого условия следует уравнение (3). Из (2а) следует, что

$$k_1^* = s^* \frac{f_1(k_1^*)}{\nu}, \tag{21}$$

т.е. фондовооружённость $\bar{k}_1 = k_1^*$ достигается при

$$s^* = \nu \frac{k_1^*}{f_1(k_1^*)}. \tag{22}$$

Согласно (3)

$$f_1'(k_1^*) = \nu. \tag{23}$$

Использование (23) в (22) приводит к (2а). Так как $\left|OA_2^*\right| = \left|OA_1^*\right|$, то из (13), с учётом (23), следует

$$\left|OA_2^*\right| = \frac{(1 - s^*) f_1(k_1^*)}{f_1'(k_1^*)}. \tag{24}$$

Поскольку $\hat{k}_2^* < 0$, то из (23), (24) следует

$$A_2^* = \left(\frac{(s^* - 1) f_1(k_1^*)}{f_1'(k_1^*)},\, 0 \right) = \left(\frac{(s^* - 1) f_1(k_1^*)}{\nu},\, 0 \right). \tag{25}$$

Так как тангенс угла касательной l_2^* и кривой $y = f_2(k_2)$ в точке D^* равен $f_2'(k_2^*)$, то уравнение прямой l_2^* имеет вид

$$y = f_2(k_2^*) + f_2'(k_2^*)(k_2 - k_2^*). \tag{26}$$

Так как $y(\hat{k}_2^*) = 0$ в точке A_2^*, то из (25), (26) следует

$$f_2(k_2^*) + f_2'(k_2^*)\left(\frac{(s^* - 1) f_1(k_1^*)}{\nu} - k_2^*\right) = 0. \qquad (27)$$

Отсюда

$$\nu f_2(k_2^*) = \left[\nu k_2^* + (1 - s^*) f_1(k_1^*)\right] f_2'(k_2^*). \qquad (28)$$

Из (2) в §2 следует, что

$$k_2^* = \frac{q^*(1 - s^*)}{(1 - q^*)} \frac{f_1(k_1^*)}{\nu}. \qquad (29)$$

Отсюда

$$q^* = \frac{\nu k_2^*}{\left[\nu k_2^* + (1 - s^*) f_1(k_1^*)\right]}. \qquad (30)$$

Согласно (28)

$$\left[\nu k_2^* + (1 - s^*) f_1(k_1^*)\right] = \nu \frac{f_2(k_2^*)}{f_2'(k_2^*)}. \qquad (31)$$

Использование (31) в (30) приводит к (2б). Формула (31) может быть переписана в виде

$$\frac{f_2(k_2^*)}{f_2'(k_2^*)} - k_2^* = \frac{(1 - s^*) f_1(k_1^*)}{\nu}. \qquad (32)$$

Поскольку (32) – тождество, то отсюда следует уравнение (4) для нахождения k_2^*. Докажем единственность решения. Пусть

$$\varphi(k_2) = \frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)} - k_2. \qquad (33)$$

Так как, согласно неоклассическим условиям $f_2(0) = 0$, $f_2'(0) = \infty$, то $\varphi(0) = 0$. Найдём $\varphi'(k_2) = \dfrac{d\varphi(k_2)}{dk_2}$. Из (33) следует, что

$$\varphi'(k_2) = -\frac{f_2(k_2) f_2''(k_2)}{(f_2'(k_2))^2}. \qquad (34)$$

Согласно неоклассическим условиям $f_2(k_2) > 0$, $f_2'(k_2) > 0$, $f_2''(k_2) < 0$. Таким образом, $\varphi'(k_2) > 0$, т.е. $\varphi(k_2)$ – монотонно возрастающая из нуля функция.

Так как $\dfrac{(1-s^*)f_1(k_1^*)}{\nu} > 0$, то уравнение

$$\varphi(k_2) = \frac{(1-s^*)f_1(k_1^*)}{\nu}, \tag{35}$$

т.е. уравнение (4) имеет единственное решение. Теорема доказана.

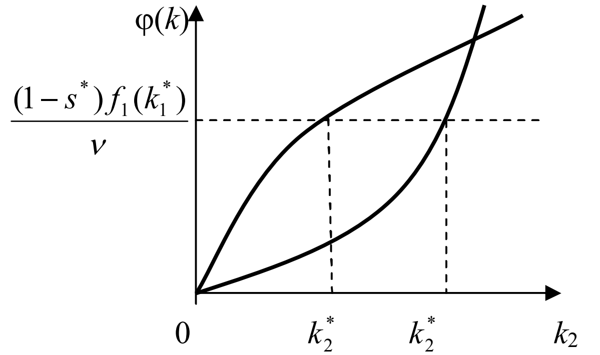

Рис. 5

Следствие. На оптимальном решении нормы накопления s^* и $\tilde{s}^* = 1 - s^*$ в 1-м и 2-м секторах экономики равняются соответственно коэффициентам эластичности по фондам и трудовым ресурсам в первом секторе при $k_1 = k_1^*$, а нормы использования трудовых ресурсов q^* и $\tilde{q}^* = 1 - q^*$ в первом и втором секторах экономики равняются соответственно коэффициентам эластичности по фондам и трудовым ресурсам во втором секторе при $k_2 = k_2^*$.

Доказательство. Согласно теореме 1.5 коэффициенты эластичности по фондам α и трудовым ресурсам β определяются формулами

$$\alpha = \frac{kf'(k)}{f(k)}, \quad \beta = 1-\alpha. \tag{36}$$

Тогда сформулированное утверждение следует из (2) и (36).

Замечание. Очевидно, что полученные значения k_1^*, s^* соответствуют максимальному значению $|OB_1|$ (см. рис.1), которое равно $|OB_1^*|$ (см. рис.3). Из сравнения (9) с (3.3.12) данное утверждение следует непосредственно из теоремы 3.2 с заменой k^* на k_1^*.

Теорема 3. Пусть $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$ являются ПФ КД, т.е.

$$F_1(K_1, L_1) = A_1 K_1^{\alpha_1} L_1^{\beta_1},\ F_2(K_2, L_2) = A_2 K_2^{\alpha_2} L_2^{\beta_2}. \tag{37}$$

Тогда

$$s^* = \alpha_1,\ q^* = \alpha_2,$$

$$k_1^* = \left[\frac{\alpha_1 A_1}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_1}},$$

$$k_2^* = \frac{(1-\alpha_1)\alpha_2}{1-\alpha_2} A_1 (k_1^*)^{\alpha_1} = \frac{(1-\alpha_1)\alpha_2}{(1-\alpha_2)}\left[\frac{\alpha_1 A_1^{1/\alpha_1}}{\nu}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha_1}}. \tag{38}$$

Замечание. Доказать самостоятельно.

§4. Экономический рост при оптимальном решении

Так как $K_1(t) = k_1(t)L_1(\mathrm{t})$, $K_2(t) = k_2(t)L_2(\mathrm{t})$, то уровни $K_1^*(t)$, $K_2^*(t)$, соответствующие оптимальным значениям фондовооружённостей $k_1 = k_1^*$, $k_2 = k_2^*$ соответственно в 1-м и 2-м секторах экономики, будут определяться, согласно (1.3), формулами

$$K_1^*(t) = k_1^* q^* L_0 e^{\lambda t} = K_{10}^* e^{\lambda t}, \tag{1}$$

$$K_2^*(t) = k_2^*(1-q^*) L_0 e^{\lambda t} = K_{20}^* e^{\lambda t}, \tag{2}$$

$$K_{10}^* = k_1^* q^* L_0,\ K_{20}^* = k_2^*(1-q^*) L_0 \tag{3}$$

Таким образом, при оптимальном решении рост ОФ в обоих секторах экономики происходит по экспоненциальному закону с коэффициентом λ в темпе роста ТР.

Поскольку средние производительности труда $y_1(t) = f_1(k_1(t))$, $y_2(t) = f_2(k_2(t))$, то

$$y_1^* = f_1(k_1^*),\ y_2^* = f_2(k_2^*), \tag{4}$$

т.е. на оптимальном решении средние производительности труда в обоих секторах экономики постоянны во времени и равны соответственно $f_1(k_1^*)$ и $f_2(k_2^*)$.

Пусть $Y_1^*(t)$, $Y_2^*(t)$ – уровни ВП соответственно в 1м и 2-м секторах экономики, достигаемые на оптимальном решении. Тогда, согласно (1.3) – (1.6), (1), (2)

$$Y_1^*(t) = F_1(K_1^*(t), L_1^*(t)) = F_1(K_{10}^* e^{\lambda t}, L_{10}^* e^{\lambda t}), \tag{5}$$

$$Y_2^*(t) = F_2(K_2^*(t), L_2^*(t)) = F_2(K_{20}^* e^{\lambda t}, L_{20}^* e^{\lambda t}), \tag{6}$$

$$L_{10}^* = q^* L_0,\ L_{20}^* = (1-q^*) L_0. \tag{7}$$

Условиями НТП в обоих секторах экономики на оптимальном решении являются условия

$$\frac{dY_1^*(t)}{dt} > 0, \quad \frac{dY_2^*(t)}{dt} > 0. \tag{8}$$

Тогда, согласно (5) – (7),

$$\frac{dY_1^*(t)}{dt} =$$

$$= \lambda e^{\lambda t} \left[\frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial K_1^*(t)} K_{10}^* + \frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial L_1^*(t)} L_{10}^* \right], \tag{9}$$

$$\frac{dY_2^*(t)}{dt} =$$

$$= \lambda e^{\lambda t}\left[\frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial K_2^*(t)} K_{20}^* + \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial L_2^*(t)} L_{20}^*\right]. \quad (10)$$

Так как $\lambda > 0,\ K_{10}^* > 0,\ L_{10}^* > 0,\ K_{20}^* > 0,\ L_{20}^* > 0,$ и по НКУ $\frac{\partial F}{\partial K} > 0,\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0,$ то из (9), (10) следует справедливость условий (8). Таким образом, на оптимальном решении обеспечивается устойчивый экономический рост как для секторов экономики в отдельности, так и для всей экономики в целом, когда выполняется условие

$$\frac{dY^*(t)}{dt} > 0, \quad (11)$$

где

$$Y^*(t) = Y_1^*(t) + Y_2^*(t) \quad (12)$$

есть общий ВВП всей экономики.

Определение. Если при экономическом росте как в отдельных секторах, так и во всей экономике выполняются условия

$$k_1(t) \equiv k_1 = \text{const},\ k_2(t) \equiv k_2 = \text{const}, \quad (13)$$

$$y_1(t) \equiv y_1 = \text{const}, y_2(t) \equiv y_2 = \text{const}, \quad (14)$$

т.е. фондовооружённости и средние производительности труда в 1-ом и 2-ом секторах экономики являются константами, не зависящими от времени, то такой экономический рост в двухсекторной экономике называется равновесным.

Так как

$$\left.\begin{array}{ll} K_1^*(t) = K_{10}^* e^{\lambda t}, & L_1^*(t) = L_{10}^* e^{\lambda t}, \\ K_2^*(t) = K_{20}^* e^{\lambda t}, & L_2^*(t) = L_{20}^* e^{\lambda t}, \end{array}\right\} \quad (15)$$

то формулы (9), (10) могут быть переписаны в виде

$$\frac{dY_1^*(t)}{dt}=\lambda\left[\frac{\partial F_1(\cdot)}{\partial K_1^*(t)}K_1^*(t)+\frac{\partial F_1(\cdot)}{\partial L_1^*(t)}L_1^*(t)\right], \quad (16)$$

$$\frac{dY_2^*(t)}{dt}=\lambda\left[\frac{\partial F_2(\cdot)}{\partial K_2^*(t)}K_2^*(t)+\frac{\partial F_2(\cdot)}{\partial L_2^*(t)}L_2^*(t)\right]. \quad (17)$$

Введём величины относительных скоростей роста ВП в 1-м и 2-м секторах экономики

$$\hat{Y}_1^*(t)=\frac{dY_1^*(t)}{dt}\frac{1}{Y_1^*(t)}=\frac{dY_1^*(t)}{dt}\frac{1}{F_1(K_1^*(t),L_1^*(t))}, \quad (18)$$

$$\hat{Y}_2^*(t)=\frac{dY_2^*(t)}{dt}\frac{1}{Y_2^*(t)}=\frac{dY_2^*(t)}{dt}\frac{1}{F_2(K_2^*(t),L_2^*(t))}. \quad (19)$$

Очевидно, что если выполняются условия (8), то выполняются и условия

$$\hat{Y}_1(t)>0,\ \hat{Y}_2(t)>0 \quad (20)$$

как условия устойчивого экономического роста. Так как согласно главе1

$$\frac{\partial F_1(\cdot)}{\partial K_1}\frac{K_1}{F_1(\cdot)}=\alpha_1,\ \ \frac{\partial F_1(\cdot)}{\partial L_1}\frac{L_1}{F_1(\cdot)}=\beta_1\,, \quad (21)$$

$$\frac{\partial F_2(\cdot)}{\partial K_2}\frac{K_2}{F_2(\cdot)}=\alpha_2,\ \ \frac{\partial F_2(\cdot)}{\partial L_2}\frac{L_2}{F_2(\cdot)}=\beta_2\,, \quad (22)$$

где α_1, α_2 и β_1, β_2 являются коэффициентами эластичностей соответственно по фондам и по трудовым ресурсам в 1-ом и 2-ом секторах экономики, и при этом $\alpha_1+\beta_1=1$, $\alpha_2+\beta_2=1$, то делением слева и справа формул (16) и (17) соответственно на $F_1(K_1^*(t),L_1^*(t))$ и $F_2(K_2^*(t),L_2^*(t))$ получаем с учётом (18) и (19), что

$$\hat{Y}_1^*(t)=\lambda,\ \ \hat{Y}_2^*(t)=\lambda. \quad (23)$$

Подводя итоги проведённому исследованию, сформулируем следующий результат.

Теорема 4. На оптимальном в смысле максимума потребления решении при экспоненциальном росте ТР с темпом λ обеспечивается равновесный рост, при котором

$k_1(t) \equiv k_1^*, k_2(t) \equiv k_2^*, y_1(t) \equiv y_1^* = f_1(k_1^*), y_2(t) \equiv y_2^* = f_2(k_2^*)$.

При этом относительные скорости роста ВП в 1-м и 2-м секторах экономики

$$\hat{Y}_1^*(t) \equiv \hat{Y}_1^* = \lambda, \quad \hat{Y}_2^*(t) \equiv \hat{Y}_2^* = \lambda.$$

§5. Золотое правило накопления (ЗПН)

Из (3.2) следует

$$s^* f_1(k_1^*) = k_1^* f_1'(k_1^*). \tag{1}$$

Так как

$$k_1^* = \frac{K_1^*(t)}{L_1^*(t)}, f_1(k_1^*) = \frac{F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{L_1^*(t)},$$

$$f_1'(k_1^*) = \frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial K_1^*(t)}, \tag{2}$$

то из (1), (2) следует, что

$$s^* F_1(K_1^*(t), L_1^*(t)) = \frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial K_1^*(t)} K_1^*(t). \tag{3}$$

С точки зрения использования $Y_1^*(t)$, согласно (1.7),

$$Y_1^*(t) = I_1^*(t) + I_2^*(t) =$$
$$= s^* F_1(K_1^*(t), L_1^*(t)) + (1 - s^*) F_1(K_1^*(t), L_1^*(t)), \tag{4}$$

где $I_1^*(t)$ и $I_2^*(t)$ – инвестиции соответственно в 1-й и 2-й секторы экономики. С точки зрения производства $Y_1^*(t)$ имеет представление

$$Y_1^*(t) = Y_{1K}^*(t) + Y_{1L}^*(t), \tag{5}$$

где $Y_{1K}^*(t)$ – часть $Y_1^*(t)$, произведённая за счёт ОФ $K_1^*(t)$, а $Y_{1L}^*(t)$– часть $Y_1^*(t)$, произведённая за счёт ТР $L_1^*(t)$. По формуле Эйлера

$$Y_1^*(t) = \frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial K_1^*(t)} K_1^*(t) + \frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial L_1^*(t)} L_1^*(t), \quad (6)$$

где $\frac{\partial F_1(\cdot)}{\partial K_1^*(t)} K_1^*(t)$ и $\frac{\partial F_1(\cdot)}{\partial L_1^*(t)} L_1^*(t)$ представляют собой доход с ОФ $K_1^*(t)$ и ТР $L_1^*(t)$. Таким образом, из (5), (6) следует

$$Y_1^*(t) = Y_{1K}^*(t) + Y_{1L}^*(t) =$$
$$= \frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial K_1^*(t)} K_1^*(t) + \frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial L_1^*(t)} L_1^*(t). \quad (7)$$

Тогда из (3),(4),(7) получаем, что

$$(1 - s^*) F_1(K_1^*(t), L_1^*(t)) = \frac{\partial F_1(K_1^*(t), L_1^*(t))}{\partial L_1^*(t)} L_1^*(t), \quad (8)$$

т.е согласно (3), (4), (7), (8),

$$I_1^*(t) = Y_{1K}^*(t),\ I_2^*(t) = Y_{1L}^*(t). \quad (9)$$

Из (3.2) следует

$$q^* f_2(k_2^*) = k_2^* f_2'(k_2^*). \quad (10)$$

Так как

$$k_2^* = \frac{K_2^*(t)}{L_2^*(t)},$$

$$f_2(k_2^*) = \frac{F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{L_2^*(t)},$$

$$f_2'(k_2^*) = \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial K_2^*(t)}, \quad (11)$$

то из (10), (11) следует, что

$$q^* F_2(K_2^*(t), L_2^*(t)) = \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial K_2^*(t)} K_2^*(t). \qquad (12)$$

По формуле Эйлера

$$Y_2^*(t) = F_2(K_2^*(t), L_2^*(t)) =$$
$$= \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial K_2^*(t)} K_2^*(t) + \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial L_2^*(t)} L_2^*(t). \qquad (13)$$

Отсюда

$$F_2(K_2^*(t), L_2^*(t)) - \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial K_2^*(t)} K_2^*(t) =$$
$$= \frac{\partial F_2(L_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial L_2^*(t)} L_2^*(t). \qquad (14)$$

Использование (12) в (14) даёт

$$(1 - q^*) F_2(K_2^*(t), L_2^*(t)) = \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial L_2^*(t)}. \qquad (15)$$

Тогда из (12), (15) следует, что

$$\frac{q^*}{(1 - q^*)} =$$
$$= \left[\frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial K_2^*(t)} K_2^*(t) \right] \left[\frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial L_2^*(t)} L_2^*(t) \right]^{-1}. \qquad (16)$$

С точки зрения производства $Y_2^*(t)$ имеет представление

$$Y_2^*(t) = F_2(K_2^*(t), L_2^*(t)) = Y_{2K}^*(t) + Y_{2L}^*(t), \qquad (17)$$

где, согласно (13),

$$\left. \begin{aligned} Y_{2K}^*(t) &= \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial K_2^*(t)} K_2^*(t), \\ Y_{2L}^*(t) &= \frac{\partial F_2(K_2^*(t), L_2^*(t))}{\partial L_2^*(t)} L_2^*(t) \end{aligned} \right\} \qquad (18)$$

являются частями $Y_2^*(t)$, произведёнными за счёт ОФ $K_2^*(t)$ и ТР $L_2^*(t)$. Таким образом, из (16), (18) следует

$$\frac{q^*}{(1-q^*)} = \frac{Y_{2K}^*(t)}{Y_{2L}^*(t)}. \qquad (19)$$

Результат, содержащийся в соотношениях (9), (19), известен как «Золотое правило накопления» в двухсекторной экономике. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 5. На оптимальном в смысле максимизации потребления решении, обеспечивающем равновесный рост обоих секторов экономики:

1) инвестиции в первый и второй секторы экономики равны соответственно доходу с основных фондов и доходу с трудовых ресурсов первого сектора;

2) трудовые ресурсы между первым и вторым секторами экономики распределяются пропорционально, соответственно, доходу с основных фондов и доходу с трудовых ресурсов второго сектора.

ЧАСТЬ II. РАВНОВЕСИЕ НА РЫНКАХ, ОБЩЕЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ, ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

Можно выделить 4 рынка: рынок благ, рынок денег, рынок капитала, рынок труда. Изучение условий существования равновесия на перечисленных рынках является одной из основных задач экономической теории.

Самое общее понимание термина *равновесие* – это равенство между спросом и предложением на соответствующем рынке.

Получение условий общего равновесия состоит в том, что сначала определяются условия равновесия на каждом из рынков в отдельности, а затем с использованием полученных условий выводятся условия достижения одновременного равновесия на всех рынках.

Общая идея получения условия равновесия одновременно на всех рынках заключается в следующем. Пусть

$$P_Y,\ P_L,\ P_M,\ P_K \tag{1}$$

соответственно цены благ Y, труда L, денег M и капитала K. Пусть индекс D означает спрос, а индекс S – предложение. Тогда избыточный спрос l-го субъекта макроэкономической деятельности на соответствующем рынке будет выражаться величинами

$$\Delta Y_l = Y_l^D - Y_l^S,\ \Delta L_l = L_l^D - L_l^S,\ \Delta M_l = M_l^D - M_l^S,$$

$$\Delta K_l = K_l^D - K_l^S. \tag{2}$$

Следовательно, суммарный результат сделок l–го субъекта в случае равновесия на всех рынках будет выражаться формулой

$$P_Y \Delta Y_l + P_L \Delta L_l + P_M \Delta M_l + P_K \Delta K_l = 0. \tag{3}$$

Пусть количество субъектов экономической деятельности равно n. Тогда из (3) следует

$$P_Y \sum_{l=1}^{n} \Delta Y_l + P_L \sum_{l=1}^{n} \Delta L_l + P_M \sum_{l=1}^{n} \Delta M_l + P_K \sum_{l=1}^{n} \Delta K_l = 0\,. \qquad (4)$$

Таким образом, основное соотношение одновременного равновесия на всех рынках будет выражаться формулой (4).

Вывод (закон Вальраса). Если существует одновременное равновесие на трёх рынках, то на четвёртом рынке обязательно будет равновесие.

Данный вывод следует непосредственно из (4). Действительно, пусть существует одновременное равновесие на трёх рынках благ, труда и денег, т.е.

$$\sum_{l=1}^{n} \Delta Y_l = \sum_{l=1}^{n} \Delta L_l = \sum_{l=1}^{n} \Delta M_l = 0.$$

Тогда, так как $P_K \neq 0$, то из (4) следует, что

$$\sum_{l=1}^{n} \Delta K_l = 0\,,$$

т.е. достигается равновесие и на рынке капитала.

Пусть $\Delta\gamma_l$ означает любую из величин ΔY_l, ΔL_l, ΔM_l , ΔK_l. Тогда:

а) если $\sum \gamma_l > 0$, то совокупный спрос на соответствующем рынке превышает совокупное предложение;

б) если $\sum \gamma_l < 0$, то совокупное предложение на соответствующем рынке превышает совокупный спрос;

в) если $\sum \gamma_l = 0$, то совокупный спрос и предложение сбалансированы, т.е. на соответствующем рынке достигнуто равновесие.

Глава 5. Рынок благ

Под совокупным спросом на рынке благ Y^D понимается суммарный потребительский спрос домашних хозяйств C, инвестиционный спрос предпринимательского сектора I, спрос государства G и спрос заграницы E, т.е.

$$Y^D = C + I + G + E .$$

Далее последовательно рассматривается каждый вид спроса.

§1. Потребительский спрос

1.1. *Функции потребления*

Потребительский спрос домашних хозяйств доминирует на рынке благ. Основные факторы, определяющие потребительский спрос домашних хозяйств:

1) доход от участия в производстве;
2) налоги и трансфертные платежи;
3) размер имущества;
4) доход с имущества.

Функция, определяющая зависимость от одного или нескольких факторов, называется *функцией потребления.*

Гипотеза абсолютного дохода (Д.М. Кейнс): потребление домашних хозяйств C зависит от абсолютной величины текущего дохода Y.

Функция потребления, построенная в соответствии с гипотезой абсолютного дохода, имеет вид

$$C = C_a + C_Y Y,\ C_a > 0,\ 0 < C_Y < 1. \qquad (1)$$

Здесь C_a – величина автономного потребления, не зависимого от текущего дохода (например, за счёт имущества), C_Y – предельная склонность к потреблению (предельная норма потребления), которая показывает, на сколько увеличится потребление при увеличении текущего дохода на одну единицу. Пусть увеличение Y на ΔY приведёт к увеличению C на ΔC. Тогда из (1) следует

$$C + \Delta C = C_a + C_Y (Y + \Delta Y) = C_a + C_Y Y + C_Y \Delta Y = = C + C_Y \Delta Y, \qquad (2)$$

т.е. $\Delta C = C_Y \Delta Y$. Отсюда $C_Y = \Delta C$ при $\Delta Y = 1$.

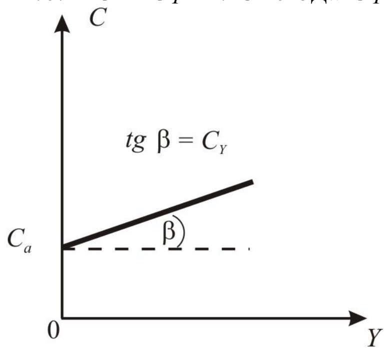

Рис. 1

График функции $C = C(Y)$ вида (1) изображён на рис. 1. Пусть $\overline{C} = \dfrac{C}{Y}$ – средняя норма потребления. Тогда из (1) следует

$$\overline{C} = \frac{C}{Y} = \frac{C_a}{Y} + C_Y, \qquad (3)$$

т.е. $\overline{C}$ убывает при увеличении Y и $\lim\limits_{Y \to \infty} \overline{C} = C_Y$.

Таким образом, в случае гипотезы абсолютного дохода средняя норма потребления $\overline{C}$ снижается при росте дохода Y, достигая в пределе предельной нормы потребления C_Y.

Расчёты, проведённые по фактическим экономическим данным, показывают, что в течение длительных промежутков времени при росте дохода не происходит снижения средней нормы потребления, которая остаётся на постоянном уровне, т.е. $\overline{C} = \dfrac{C}{Y} =$ const. Данный эффект называется *эффектом привычки к достигнутому уровню потребления.*

Рассмотрим данный эффект подробнее для трёх временных периодов t, $t + 1$, $t + 2$. Пусть доходы в эти временные периоды соответственно $Y = Y_t$, $Y = Y_{t+1}$, $Y = Y_{t+2}$ и при этом

$$Y_t < Y_{t+1} < Y_{t+2}\,, \tag{4}$$

т.е. рассматривается ситуация возрастающего дохода. Тогда *краткосрочные (однопериодные) функции потребления* C_t, C_{t+1}, C_{t+2}, построенные в соответствии с (1) имеют вид

$$\begin{aligned} C_t &= C_a^t + C_Y Y_t, \\ C_{t+1} &= C_a^{t+1} + C_Y Y_{t+1}, \\ C_{t+2} &= C_a^{t+2} + C_Y Y_{t+2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда согласно эффекту привычки к достигнутому уровню потребления

$$\overline{C_t} = \overline{C_{t+1}} = \overline{C_{t+2}}\,, \tag{6}$$

где

$$\overline{C_t} = \frac{C_t}{Y_t}, \overline{C_{t+1}} = \frac{C_{t+1}}{Y_{t+1}}, \overline{C_{t+2}} = \frac{C_{t+2}}{Y_{t+2}}.$$

Из (5), (6) следует

$$\frac{C_a^t}{Y_t} = \frac{C_a^{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{C_a^{t+2}}{Y_{t+2}}. \tag{7}$$

Использование (4) в (7) даёт

$$C_a^t < C_a^{t+1} < C_a^{t+2}, \tag{8}$$

т.е. прямые, соответствующие краткосрочным функциям потребления (5), сдвигаются параллельно вверх (см. рис. 2).

Очевидно, что для выполнения условия (7) необходимо, чтобы точки $A = (Y_t, C_t), B = (Y_{t+1}, C_{t+1}), D = (Y_{t+2}, C_{t+2})$, лежали на одной прямой L.

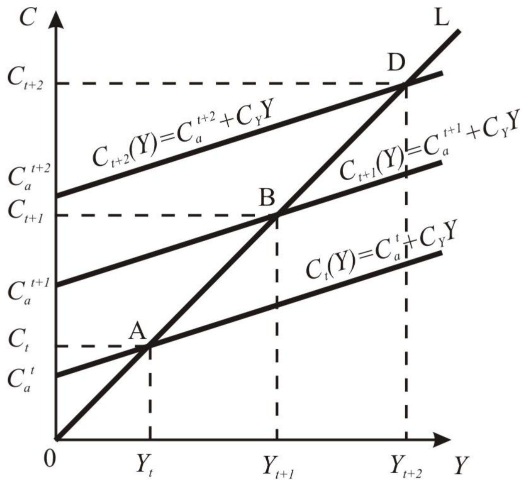

Рис. 2

Недостатки функции потребления, соответствующей гипотезе абсолютного дохода, устраняются функцией потребления, соответствующей *гипотезе перманентного дохода* (М. Фридман): субъект экономической деятельности учитывает не текущий доход Y_t, а средневзвешенный доход Y_p от ожидаемых доходов в текущий момент времени Y_t и в будущие временные периоды $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_{t+k}$, т.е.

$$Y_p = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i Y_{t+i}, 0 \le \alpha_i \le 1, \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1. \qquad (9)$$

Рассмотрим подробнее двухпериодную модель, для которой перманентный доход выражается формулой

$$Y_P = \alpha Y_{t+1} + (1-\alpha) Y_t, 0 < \alpha < 1. \qquad (10)$$

Замена Y на Y_p в (1) даёт

$$C_{t+1} = C_a + C_Y Y_p = C_a + \alpha C_Y Y_{t+1} + (1-\alpha) C_Y Y_t, \qquad (11)$$
$$C_a > 0,\ 0 < C_Y < 1.$$

Модель (10), (11) определяет будущее потребление C_{t+1} с учётом текущего Y_t и ожидаемого будущего Y_{t+1}

доходов. Если в (10) и (11) сдвинуть время на единицу назад, то получим, что

$$Y_P = \alpha Y_t + (1-\alpha)Y_{t-1}, \tag{12}$$

$$C_t = C_a + C_Y Y_p = C_a + \alpha C_Y Y_t + (1-\alpha) C_Y Y_{t-1}. \tag{13}$$

Модель (12), (13) определяет текущее потребление C_t с учётом текущего Y_t и прошлого Y_{t-1} доходов. Считаем, что в текущий период времени t потребление C_t^0 выражается через доход Y_{t-1} в предыдущий период времени в соответствии с (1) в виде

$$C_t^0 = C_a + C_Y Y_{t-1}. \tag{14}$$

Пусть:

C_t^1 – потребление в текущий временной период, если доход в период времени t получает приращение ΔY_t,

т.е. $Y_t = Y_{t-1} + \Delta Y_t$;

C_{t+1}^0 – потребление в следующем временном периоде при сохраняющемся доходе $Y_{t+1} = Y_t$;

C_{t+1}^1 – потребление в следующем временном периоде, если доход в период времени $t + 1$ получает приращение ΔY_{t+1}, т.е. $Y_{t+1} = Y_t + \Delta Y_{t+1}$;

C_Y^t – предельная склонность к потреблению в коротком временном периоде (за один период времени);

$C_Y^{t,t+1}$ – предельная склонность к потреблению в длительном временном периоде (за два периода времени).

Теорема 1. Имеют место свойства

$$C_Y^t < C_Y^{t,t+1}, \tag{15}$$

$$C_t^0 < C_t^1 < C_{t+1}^0 < C_{t+1}^1, \tag{16}$$

где

$$C_Y^t = \alpha C_Y,\ C_Y^{t,t+1} = C_Y, \tag{17}$$

$$C_t^1 = C_t^0 + \alpha C_Y \Delta Y_t, \tag{18}$$

$$C_{t+1}^0 = C_t^0 + C_Y \Delta Y_t, \tag{19}$$

$$C_{t+1}^1 = C_{t+1}^0 + \alpha C_Y \Delta Y_{t+1}. \tag{20}$$

Доказательство. По определению, аналогично C_Y в модели (1),

$$C_Y^t = \frac{dC_t}{dY_t},\ C_Y^{t,t+1} = \frac{dC_t}{dY_p}. \tag{21}$$

Тогда с использованием (12), (13) получаем

$$C_Y^t = \frac{dC_t}{dY_t} = \alpha\, C_Y,$$

т.е. пришли к первой формуле (17);

$$C_Y^{t,t+1} = \frac{dC_t}{dY_p} = \frac{\partial C_t}{\partial Y_p}\frac{\partial Y_p}{\partial Y_t} + \frac{\partial C_t}{\partial Y_p}\frac{\partial Y_p}{\partial Y_{t-1}} =$$

$$= \alpha C_Y + (1-\alpha) C_Y = C_Y,$$

т.е. пришли ко второй формуле (17). Так как 0< α <1, то свойство (15) очевидно.

Из (13), с учётом (14), следует

$$C_t^1 = C_a + \alpha C_Y (Y_{t-1} + \Delta Y_t) + (1-\alpha) C_Y Y_{t-1} =$$

$$= C_a + \alpha C_Y Y_{t-1} + \alpha C_Y \Delta Y_t + C_Y Y_{t-1} - \alpha C_Y Y_{t-1} =$$

$$= C_a + C_Y Y_{t-1} + \alpha C_Y \Delta Y_t = C_t^0 + \alpha C_Y \Delta Y_t,$$

т.е. пришли к (18).

Из (11), с учётом (14), следует

$$C_{t+1}^0 = C_a + \alpha C_Y Y_t + (1-\alpha) C_Y Y_t =$$

$$C_a + \alpha C_Y Y_t + C_Y Y_t - \alpha C_Y Y_t =$$

$$= C_a + C_Y Y_t = C_a + C_Y (Y_{t-1} + \Delta Y_t) =$$

$$= C_a + C_Y Y_{t-1} + C_Y \Delta Y_t = C_t^0 + C_Y \Delta Y_t,$$

т.е. пришли к (19).

Из (11), с учётом (14), (19), следует

$$
\begin{aligned}
C_{t+1}^{1} &= C_a + \alpha C_Y (Y_t + \Delta Y_{t+1}) + (1-\alpha) C_Y Y_t = \\
&= C_a + \alpha C_Y Y_t + \alpha C_Y \Delta Y_{t+1} + C_Y Y_t - \alpha C_Y Y_t = \\
&= C_a + C_Y Y_t + \alpha C_Y \Delta Y_{t+1} = \\
&= C_a + C_Y (Y_{t-1} + \Delta Y_t) + \alpha C_Y \Delta Y_{t+1} = \\
&= C_a + C_Y Y_{t-1} + C_Y \Delta Y_t + \alpha C_Y \Delta Y_{t+1} = \\
&= C_t^0 + C_Y \Delta Y_t + \alpha C_Y \Delta Y_{t+1} = C_{t+1}^0 + \alpha C_Y \Delta Y_{t+1},
\end{aligned}
$$

т.е. пришли к (20). Свойства (16) следуют очевидным образом из (18) – (20). Теорема доказана.

Согласно модели (1), соответствующей гипотезе абсолютного дохода, предельная склонность к потреблению C_Y формально была определена в виде $C_Y = \dfrac{dC_Y}{dY}$, а содержательно – как величина, равная увеличению потребления за счёт увеличения дохода на одну единицу. Формулы (17) были получены формально согласно (21). Покажем, что C_Y^t характеризует увеличение потребления в текущем временном периоде при увеличении текущего дохода Y_t на одну единицу, а $C_Y^{t,t+1}$ характеризует увеличение потребления за два временных периода при том же увеличении текущего дохода.

Из (13) следует

$$
\begin{aligned}
C_t + \Delta C_t &= C_a + \alpha C_Y (Y_t + 1) + (1-\alpha) C_Y Y_{t-1} = \\
&= C_a + \alpha C_Y Y_t + \alpha C_Y + (1-\alpha) C_Y Y_{t-1} = C_t + \alpha C_Y .
\end{aligned}
$$

Таким образом, с учётом (17), получили, что

$$
\Delta C_t = \alpha C_Y = C_Y^t . \qquad (22)
$$

Из (11) следует

$$C_{t+1} + \Delta C_{t+1} = C_a + \alpha C_Y Y_{t+1} + (1-\alpha) C_Y (Y_t + 1) =$$
$$= C_a + \alpha C_Y Y_{t+1} + (1-\alpha) C_Y Y_t + (1-\alpha) C_Y .$$

Таким образом,

$$\Delta C_{t+1} = (1-\alpha) C_Y . \qquad (23)$$

Тогда из (22), (23), с учётом (17), следует

$$\Delta C_{t,t+1} = \Delta C_t + \Delta C_{t+1} = C_Y = C_Y^{t,t+1} .$$

Вывод. В случае гипотезы перманентного дохода при увеличении со временем дохода происходит увеличение потребления и предельных склонностей к потреблению. Тем самым в математической модели перманентного дохода устраняются недостатки математической модели гипотезы абсолютного дохода.

1.2. *Функции сбережения*

Введём понятие сбережения как непотреблённой части дохода. Тогда *функция сбережения* S определяется как разность между доходом Y и потреблением C, т.е.

$$S = Y - C. \qquad (24)$$

Теорема 2. В случае гипотезы абсолютного дохода функция сбережения имеет вид

$$S = S_Y Y - C_a , \qquad (25)$$

$$S_Y = \frac{dS}{dY} = (1 - C_Y) ,$$

где S_Y – *предельная склонность к сбережению* (*предельная норма сбережения*).

Доказательство. Использование (1) в (24) даёт

$$S = Y - C_a - C_Y Y = (1 - C_Y) Y - C_a . \qquad (26)$$

Тогда формулы (25) следуют из (26).

Теорема 3. Сумма предельных склонностей к потреблению и сбережению равна единице, т.е.

$$C_Y + S_Y = 1, \qquad (27)$$

а приращение дохода равно сумме приращений потребления и сбережения, т.е.

$$dY = dC + dS. \qquad (28)$$

Доказательство. Так как

$$Y = C + S, \qquad (29)$$

то свойство (28) следует из (29), а (27) следует из (25). Так как $C = C(Y)$, $S = S(Y)$, то график функции $S(Y)$ согласно (29) получается вычитанием прямой $C(Y) = C_a + C_Y Y$ (см. (1)) из прямой $Y \equiv Y$, т.е. из прямой, выходящей из начала координат под углом 45° (см. рис. 3).

Очевидно, что

$$S(0) = -C_a,\ Y_0 = \frac{C_a}{1 - C_Y} = \frac{C_a}{S_Y},\ C(Y_0) = Y_0. \qquad (30)$$

В соотношениях между доходами Y, потреблением C и сбережениями S выделяются следующие ситуации.

1) При $Y = Y_0$ доход целиком расходуется на потребление ($C(Y_0) = Y_0$, $S(Y_0) = 0$).

2) При $Y < Y_0$ потребление превышает доход ($C(Y) > Y$), и поэтому сбережения являются величиной отрицательной. В этом случае кроме дохода Y потребляется и часть имущества C_a.

3) При $Y_0 < Y < Y^*$ часть дохода сберегается, при этом $S(Y) < C(Y)$, т.е. потребляется большая относительно сбережения часть дохода.

4) При $Y = Y^*$ доход делится на потребление и сбережение поровну, т.е. $S(Y^*) = C(Y^*)$.

5) При $Y > Y^*$ сбережения превышают потребление, т.е. $S(Y) > C(Y)$.

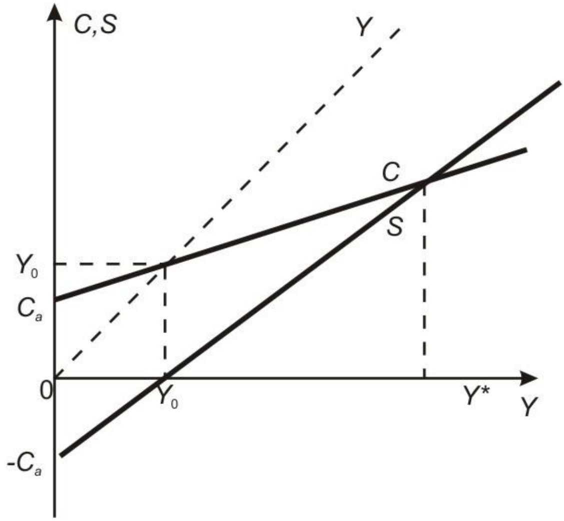

Рис. 3

Замечание. Очевидно, что наличие Y^* обеспечивается условием $S_Y > C_Y$, когда предельная склонность к сбережению больше предельной склонности к потреблению. В противном случае, когда $C_Y > S_Y$,угол наклона прямой $C(Y)$ больше угла наклона прямой $S(Y)$, значение $Y = Y^*$, когда $C(Y^*) = S(Y^*)$, отсутствует и при любом доходе потребление превышает сбережения.

Указание. Дать экономическую интерпретацию: а) значению S_Y; б) соотношению (27); в) формуле (30) для Y_0. Привести аналоги формулы (27) из теории производства. Найти формулу для Y^*. Нарисовать рис. 3 для случая отсутствия Y^*.

1.3. *Неоклассические функции потребления и сбережения*

Подход к построению функций потребления и сбережения, рассмотренный в предыдущих пунктах, берёт начало с гипотезы абсолютного дохода и может быть определён как *кейнсианский*. В основе этого подхода лежит предположение, что доход субъектов экономической деятельности является заданной экзогенной величиной. Неоклассический подход заключается в том, что доход является эндогенной величиной и сам субъект определяет, какова будет величина его дохода путём распределения *календарного* времени на *рабочее* и *свободное*, исходя из критерия *максимизации полезности.*

Данный подход заключается в следующем.

Пусть:

T – календарное время;

N – рабочее время;

Ψ – свободное время.

Тогда

$$\Psi = T - N. \tag{31}$$

Пусть:

П – доход от имущества;

ω – ставка заработной платы ;

Y – доход субъекта экономической деятельности.

Тогда

$$Y = \omega N + \Pi \tag{32}$$

– бюджетное уравнение.

Вводится в рассмотрение функция $U(Y,\Psi)$, называемая *функцией полезности*, смысл которой заключается в следующем: чем выше доход и чем больше свободное время, тем полезнее экономическая деятельность субъекта. Из смысла $U(\cdot)$ следует, что она должна рассматриваться на классе функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$U(Y,\Psi) > 0,\ Y > 0,\ \Psi > 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} > 0,\ \frac{\partial U}{\partial \Psi} > 0. \tag{33}$$

Широко используемой является функция полезности вида

$$U(Y,\Psi) = \sqrt{Y\Psi}. \tag{34}$$

Определение. Совокупность точек на плоскости (Y,Ψ), для которых

$$U(Y,\Psi) = U = \text{const}, \qquad (35)$$

называется *кривой безразличия*.

Из (34) следует, что если за абсциссу взять Ψ, а за ординату Y, то уравнение кривой безразличия как функции $Y = \varphi(\Psi,U)$ имеет, с учётом (31), вид

$$Y = \varphi(\Psi,U) = \frac{U^2}{\Psi} = \frac{U^2}{(T-N)} = \Phi(U,N). \qquad (36)$$

Так как

$$\frac{dY}{dN} = \frac{U^2}{(T-N)^2} > 0, \ \frac{d^2Y}{dN^2} = 2\frac{U^2}{(T-N)^3} > 0,$$

то кривая $Y = \Phi(U,N)$ – возрастающая выпуклая вниз функция N при фиксированном U, которая для трёх значений $U_1 < U_2 < U_3$ полезности имеет вид, представленный на (рис. 4). Субъект хозяйствования, чтобы максимизировать полезность своей деятельности, стремится находиться на более высокой кривой безразличия, но его возможности ограничены бюджетным уравнением (32), которое на рис.4 изображено прямой L. Тогда точка касания A соответствующей кривой безразличия определит искомую величину дохода Y^* и величину рабочего времени N^*, которые достигаются при заданной ставке заработной платы ω и заданном доходе с имущества Π.

Замечание. Приведённые рассуждения справедливы и для кривой безразличия произвольного вида $Y = \Phi(U,N)$, удовлетворяющей условиям

$$\Phi(U,N) > 0, \ U > 0, \ N > 0, \ \frac{\partial\Phi}{\partial N} > 0; \ \frac{\partial^2\Phi}{\partial N^2} > 0. \qquad (37)$$

Зададимся теперь вопросом: каким образом при неоклассическом подходе осуществляется субъектом хозяйствования распределение дохода между текущим потреблением и сбережением если:

а) ставка процента i задана;

б) текущему потреблению отдаётся предпочтение перед будущим потреблением

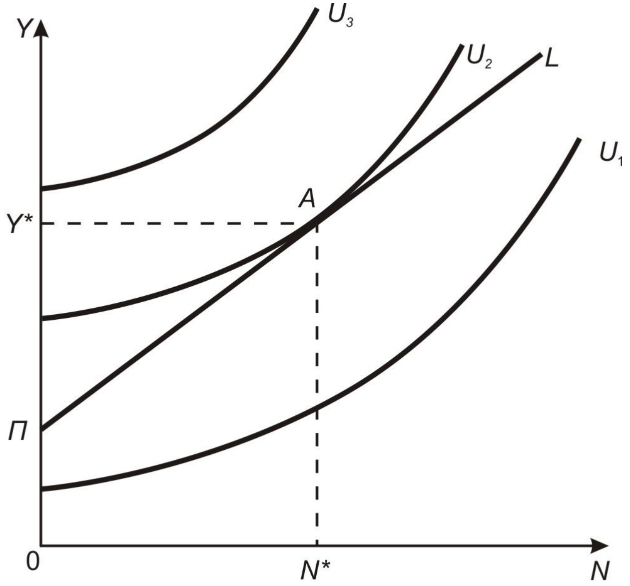

Рис. 4

Для ответа на поставленные вопросы рассматривается двухпериодная модель, в которой C_t, Y_t – текущее потребление и доход, C_{t+1}, Y_{t+1} – будущее потребление и доход.

Для удобства обозначим $C_t = C_1$, $C_{t+1} = C_2$, $Y_t = Y_1$, $Y_{t+1} = Y_2$. Тогда если b_0 – стоимость имущества на начало первого периода, b_1 – стоимость имущества к окончанию первого периода, а b_2 – стоимость имущества на конец второго периода, то получаем бюджетные уравнения субъекта экономической деятельности в двух смежных временных периодах в виде

$$Y_1 + (1+ i)b_0 = C_1 + b_1, \qquad (38)$$

$$Y_2 + (1+ i)b_1 = C_2 + b_2. \qquad (39)$$

Исключая b_1 из (38), (39) , получаем

$$C_1 + \frac{C_2}{(1+i)} = Y_1 + \frac{Y_2}{(1+i)} + b_0(1+i) - \frac{b_2}{(1+i)}. \qquad (40)$$

Левая часть (40) – дисконтированная сумма потребления за оба периода. Правая часть (38) – дисконтированная сумма имеющихся для потребления средств, включающая доходы за оба периода и изменение стоимости имущества за счёт процентной ставки. Обозначая правую часть (40) через A, получим уравнение, связывающее текущее потребление C_1 и будущее потребление C_2 в виде

$$C_1 = A - \frac{C_2}{(1+i)}. \qquad (41)$$

Так как

$$b_1 = b_0(1 + i),\ b_2 = b_1(1 + i) = b_0(1 + i)^2, \qquad (42)$$

то

$$b_0(1 + i)\ \frac{b_2}{(1+i)} = b_0(1+i) - \frac{b_0(1+i)^2}{(1+i)} = 0 \qquad (43)$$

и, таким образом,

$$A = Y_1 + \frac{Y_2}{(1+i)}. \qquad (44)$$

Из (44) следует, что

$$A(i_2) < A(i_1),\ i_2 > i_1. \qquad (45)$$

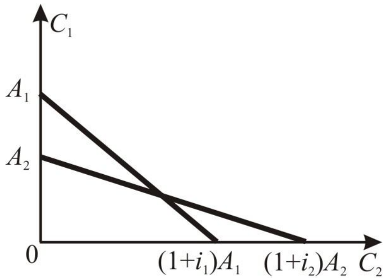

Рис. 5

На рис.5 с учётом (45) изображены две прямые вида (41) для двух значений процентной ставки $i = i_1$ и $i = i_2$, таких, что $i_2 > i_1$, которым соответствуют $A(i_1) = A_1$ и $A(i_2) = A_2$ с учётом того, что $\dfrac{dC_1}{dC_2} = -\dfrac{1}{(1+i)}$.

Аналогично функции полезности $U(Y,\Psi)$ можно ввести *функцию полезности* $U(C_1,C_2)$. Исходя из предположения, что текущему потреблению C_1 отдаётся предпочтение перед будущим потреблением C_2, смысл $U(C_1,C_2)$ заключается в следующем: полезность тем выше, чем больше C_1 и чем меньше C_2. Таким образом, функция полезности $U(C_1, C_2)$ должна рассматриваться на классе функций, удовлетворяющих условиям

$$U(C_1, C_2) > 0,\ C_1 > 0,\ C_2 > 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial C_1} > 0,\ \frac{\partial U}{\partial C_2} < 0. \tag{46}$$

Определение. Аналогично (35) совокупность точек на плоскости (C_1,C_2), дл которых

$$U(C_1, C_2) = U = \text{const}, \tag{47}$$

называется *кривой безразличия.*

Таким образом, различные сочетания C_1 и C_2 имеют одинаковую полезность $U(C_1, C_2) = U = \text{const}$, если отказ от текущего потребления на величину ΔC_1 будет компенсироваться возрастающим будущим потреблением на величину ΔC_2. Кривые безразличия, соответствующие трём значениям $U_1 < U_2 < U_3$ будут иметь вид, изображённый на рис. 6.

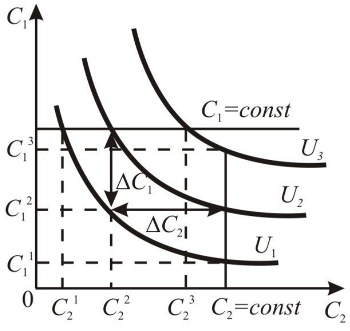

Рис. 6

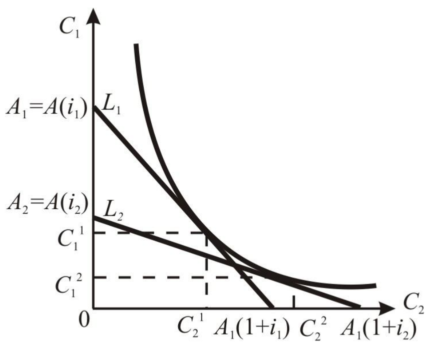

Рис. 7

Решение субъекта хозяйствования о том, какие конкретно выбрать значения текущего C_1 и будущего C_2 потребления, принимается совмещением рис. 5 и 6. На рис. 7 изображены две линии L_1 и L_2, определяемые соотношением между C_1 и C_2 для двух процентных ставок i_1 и i_2, причём $i_2 > i_1$, касающихся соответствующей кривой безразличия. Соответственно C_1^1 и C_2^1 обозначают текущее и будущее потребление при процентной ставке i_1, а C_1^2 и C_2^2 при i_2. Из рис. 7 следует

$$i_2 > i_1:\ C_1^2 < C_1^1;\ \ C_2^2 > C_2^1. \qquad (48)$$

Вывод. Таким образом, в неоклассической концепции функция *текущего потребления* субъектов экономической деятельности является *убывающей функцией* ставки процента, а функция *будущего потребления* – *возрастающей* функцией.

В соответствии с выводом для текущего потребления $C(i)$, как функции ставки процента используется функция

$$C(i) = C_a + Y\ \ ai,\ a > 0. \qquad (49)$$

Тогда из (24) и (49) следует, что соответствующая функция сбережения имеет вид

$$S(i) = \ C_a + ai. \qquad (50)$$

Вывод. Неоклассическая функция *текущего сбережения* является *возрастающей* функцией ставки процента.

Обобщим полученные результаты в виде следующего утверждения.

Теорема 4. На классе линейных моделей неоклассические функции потребления $C(i)$ и сбережения $S(i)$ как функции ставки процента i являются соответственно убывающей и возрастающей функциями i и определяются формулами (49), (50).

Замечание. Параметр a показывает на сколько единиц сократится потребление $C(i)$ и соответственно возрастёт сбережение $S(i)$ при увеличении i на 1%.

Замечание. Согласно (49), (50)

$$C = C(\underset{+}{Y}, \underset{-}{i}),\ S = S(\underset{+}{i}). \qquad (51)$$

§2. Инвестиционный спрос

2.1. *Общие положения*

Под *инвестиционным спросом* понимается спрос предпринимателей на блага для: 1) восстановления изношенного капитала (основных фондов); 2) увеличения реального капитала.

Так как инвестиции сильнее всего реагируют на изменение экономической конъюнктуры, то спрос на инвестиции – это самая изменчивая часть совокупного спроса на блага. В зависимости от того, какие факторы определяют объём спроса на инвестиции, они делятся на *индуцированные* и *автономные*.

1. *Индуцированные инвестиции*. Инвестиции $I^{ин}$ называются индуцированными, если причиной их осуществления является устойчивое увеличение спроса на блага.

Пусть

$$\text{к} = \frac{dK}{dY} \qquad (1)$$

есть коэффициент, показывающий, сколько единиц дополнительного капитала требуется для производства дополнительной единицы валового продукта. Тогда для увеличения производства продукта с Y_0 до Y_1 необходимы индуцированные инвестиции в размере

$$I^{\text{ин}} = \text{к}(Y_1 - Y_0),\ \text{к} > 0. \qquad (2)$$

Коэффициент к называется *предельной склонностью к инвестициям* или *нормой инвестиций.*

2. *Автономные инвестиции* (I^a). Нередко предпринимателям оказывается выгодно делать инвестиции и при фиксированном национальном доходе, т.е. при заданном совокупном спросе на блага. Это прежде всего инвестиции в новую технику и повышение качества продукции. Подобные инвестиции называются автономными. Какие же факторы определяют размер I^a. На этот вопрос существует два ответа: кейнсианский и неоклассический.

2.2. *Кейнсианская функция автономных инвестиций*

В основе данного определения I^a лежит понятие *предельной эффективности капитала* (Дж. Кейнс). Введение этого понятия осуществляется через понятие дисконтирования. Инвестиции, в отличие от текущих затрат на производство, дают результат не в том временном периоде, в котором они осуществляются, а в течение ряда последующих периодов. Если нужно определить стоимость M_0 возможного получения некоторой суммы M_t денег через t лет, то нужно эту сумму разделить на величину $(1 + k)^t$, где k – *дисконтная ставка* (ставка дисконтирования), т.е.

$$M_0 = \frac{M_t}{(1+k)^t}, \; M_t = M_0(1+k)^t. \qquad (3)$$

Таким образом, *дисконтирование* – это предпочтение экономическим субъектом нынешней ценности будущей, а k – мера этого предпочтения.

Рассмотрим текущий временной период t=0 и три будущих $t + 1 = 1$, $t + 2 = 2$, $t + 3 = 3$. Пусть некоторый инвестиционный проект требует вложения K_0 в текущем периоде и обещает дать в следующих трёх периодах соответственно $П_1$, $П_2$, $П_3$ чистого дохода. Тогда инвестор сочтёт данный проект экономически целесообразным, если

$$K_0 \le \frac{П_1}{(1+k)} + \frac{П_2}{(1+k)^2} + \frac{П_3}{(1+k)^3}. \qquad (4)$$

Определение. Значение $k = k^*$, при котором в (4) достигается равенство, называется *предельной эффективностью капитала*, т.е.

$$K_0 = \frac{П_1}{(1+k^*)} + \frac{П_2}{(1+k^*)^2} + \frac{П_3}{(1+k^*)^3}. \qquad (5)$$

Вывод. Из (3) следует, что чем больше k, тем больше M_t при заданном M_0 и тем меньше M_0 при заданном M_t. Таким образом, из всего набора вариантов инвестирования $\{П_1, П_2, П_3\}$ наиболее выгодным является тот, которому соответствует наибольшее k^*.

Если M_0 в (3) обозначить через $I(k^*)$ и определить как объём *рационального инвестирования*, то согласно сделанному выводу $I(k^*)$ есть убывающая функция предельной эффективности капитала k^*(рис. 8).

На рис. 8 номера I, II, III, IV ,V инвестиционных проектов $\{П_1,П_2,П_3\}$возрастают по мере убывания их эффективности.

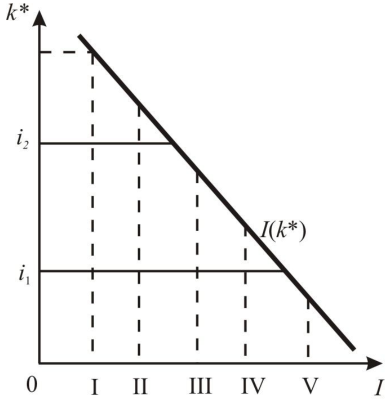

Рис. 8

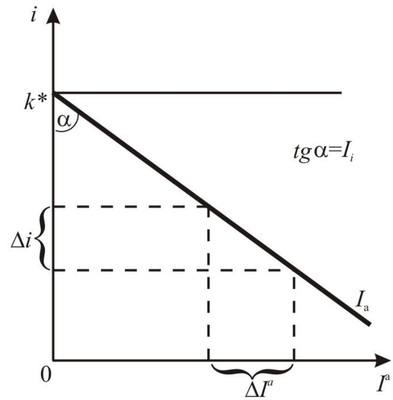

Рис. 9

Кроме доходности вариантов инвестиционных проектов, должна учитываться *степень риска* каждого из них. Среди всех вариантов вложений есть один *самый надёжный* – это покупка государственных облигаций, по которым всегда в срок выплачиваются установленные проценты. Поэтому ставку процента i по государственным облигациям можно рассматривать в качестве нижней границы для k^*, т.е. в инвестиции делаются вложения, если $k^* > i$. Поэтому (см. рис. 8) при ставке i_1 инвестиции могут быть сделаны в проекты I, II, III, IV, а при ставке $i_2 > i_1$ только в проекты I и II. Следовательно, *кейнсианскую функцию автономных инвестиций* $I^a = I^a\,(k^*, i)$ можно представить в виде

$$I^a = I_i\,(k^* - i),\ k^* > i, \qquad (6)$$

где I_i – *предельная склонность к инвестированию* (*предельная норма инвестирования*), которая показывает, на сколько единиц изменится объём инвестиций при изменении разности $\Delta(k^*, i) = (k^* - i)$ на одну единицу. График функции (6) изображён на Рис. 9.

Вывод. Из (6) следует, что I^a возрастает при возрастании k^* и убывании i, что условно можно отразить следующим образом

$$I^a = I^a\,(\underset{+}{k^*}, \underset{-}{i}). \tag{7}$$

Из (7) следует, что кейнсианская функция автономных инвестиций является возрастающей функцией предельной эффективности капитала k^* и убывающей функцией ставки процента i.

2.3. *Неоклассическая функция автономных инвестиций*

Предприниматели прибегают к инвестициям для того, чтобы довести объём имеющегося у них капитала до оптимальных размеров. Пусть:

I_t^a – объём автономных инвестиций в период t;

K_t – объём капитала на начало периода;

K^* – оптимальный объём капитала;

$0 < \beta < 1$ – коэффициент приближения K_t к K^*;

$F(K,L)$ – неоклассическая производственная функция, определяющая доход Y через капитал K и трудовые ресурсы L в виде $Y = F(K,L)$.

Тогда I_t^a можно представить в виде

$$I_t^a = \beta(K^* - K_t). \tag{7}$$

Оптимальным является такой размер капитала, который при существующей технологии (производственной функции) обеспечивает максимальную прибыль. Пусть

$$r = \frac{dY}{dK} \tag{8}$$

есть предельная производительность капитала. Из ч.I данного учебного пособия мы знаем, что, с учётом неоклассических условий для $F(K,L)$, r – монотонно убывающая функция капитала K, причём

$$r = \frac{dY}{dK} = \frac{dF}{dK}; \frac{dr}{dK} = \frac{d^2F}{dK^2} < 0.$$
$$\lim_{K \to 0} r(K) = \infty, \lim_{K \to \infty} r(K) = 0. \tag{9}$$

Тогда если μ – норма амортизации, i – ставка процента, то, согласно *принципу совершенной конкуренции*, при которой достигается максимум прибыли, $rK = \mu K + iK$, т.е.

$$r = \mu + i. \tag{10}$$

Условие (10) является условием нахождения оптимального размера капитала K^* (см. рис. 10). Кривые построены в соответствии с неоклассическими условиями (9). Кривые $r_1(K)$ и $r_2(K)$ соответствуют двум технологиям, т.е. двум производственным функциям $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$. Очевидно, что $r_2(K)$ соответствует более совершенной технологии. Точки K_1^* и K_2^* будут оптимальными размерами капитала.

Если при данной ставке процента i растёт предельная производительность капитала r (кривая $r(K)$ двигается вверх), то K^* тоже увеличивается ($K_2^* > K_1^*$). Следовательно, K^* – возрастающая функция r, т.е.

$$K^* \uparrow \text{ при } r \uparrow. \tag{11}$$

Также очевидно, что при заданном r (кривая $r_1(K)$ либо $r_2(K)$) происходит рост K^* при убывании i, т.е.

$$K^* \uparrow \text{ при } i \downarrow \text{ или } K^* \downarrow \text{ при } i \uparrow. \tag{12}$$

Зависимости (11) и (12) можно отразить следующим образом:

$$K^* = K^*(\underset{+}{r}, \underset{-}{i}). \tag{13}$$

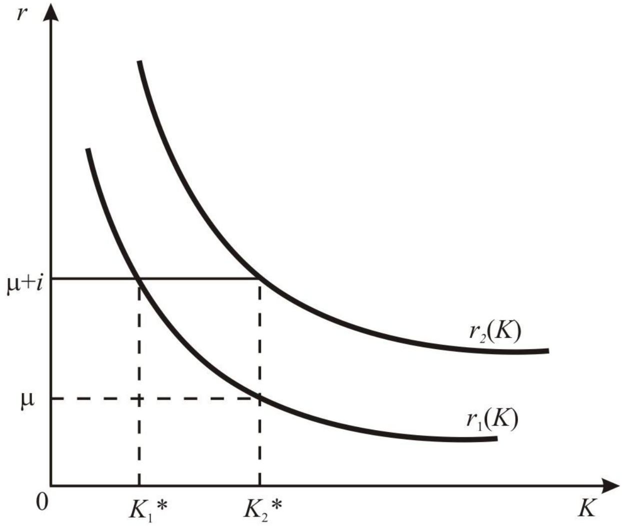

Рис. 10

Если при данной ставке процента i растёт предельная производительность капитала r (кривая $r(K)$ двигается вверх), то K^* тоже увеличивается ($K_2^* > K_1^*$). Следовательно, K^* – возрастающая функция r, т.е.

$$K^* \uparrow \text{ при } r \uparrow . \tag{11}$$

Также очевидно, что при заданном r (кривая $r_1(K)$ либо $r_2(K)$) происходит рост K^* при убывании i, т.е.

$$K^* \uparrow \text{ при } i \downarrow \text{ или } K^* \downarrow \text{ при } i \uparrow . \tag{12}$$

Зависимости (11) и (12) можно отразить следующим образом:

$$K^* = K^* (\underset{+}{r}, \underset{-}{i}). \tag{13}$$

Так как объём капитала K_t на начало периода задан, то из (7) и (13) следует

$$I_t^a = I_t^a (\underset{+}{k^*}, \underset{-}{i}) . \tag{14}$$

Вывод. Из (14) следует, что неоклассическая функция автономных инвестиций является возрастающей функцией предельной производительности капитала r и убывающей функцией ставки процента.

Предельная производительность капитала r определятся технологией производства (видом производственной функции) и в этом смысле является *объективным* параметром. Предельная эффективность капитала k^* является в значительной мере *субъективным* параметром, поскольку (см.(5)) определяется значениями Π_i, которые являются оценочными величинами и основаны на *ожиданиях* инвестора относительно *будущих* цен, затрат и объёмов спроса. Отсюда следуют и достоинства и недостатки того и другого определений функции автономных инвестиций.

2.4. *Спрос государства и заграницы*

Спрос государства. Государство покупает продукцию, изготовленную в частном секторе, для производства общественных благ. Поскольку экономическая активность государства в отличие от хозяйственной деятельности частных секторов экономики весьма разнообразна, то трудно выделить главные факторы, однозначно определяющие объём государственных расходов и соответственно спрос государства на рынке благ. Поэтому функция спроса G_t государства на рынке благ полагается постоянной и не зависящей от времени t, т.е.

$$G_t = G = \text{const}. \qquad (1)$$

Спрос заграницы. Спрос заграницы на рынке благ некоторой страны определяет объём экспорта этой страны и зависит главным образом от: 1) *соотношения* цен на отечественные и заграничные товары; 2) *обменного курса* национальной валюты. Оба этих фактора объединяются в понятии «реальные условия обмена», обозначаемом θ.

Пусть:

P – уровень цен внутри страны;

P^Z – уровень цен заграницы;

e – обменный курс отечественной валюты, показывающий, сколько единиц отечественной валюты дают за единицу иностранной валюты.

Введём величину θ в виде

$$\theta = \frac{P}{eP^Z}. \tag{2}$$

Поскольку величина $P = \theta(eP^Z)$ показывает, сколько заграничных благ страна может получить в обмен на единицу своего блага, то очевидно, что с ростом θ реальные условия обмена улучшаются, так как за единицу отечественного блага можно получит больше иностранных благ. Однако для заграницы это означает подорожание товаров данной страны, что приводит к сокращению экспорта из этой страны.

Вывод. При *увеличении* θ: а) происходит увеличение P, что приводит к *сокращению экспорта* из страны, так как товары данной страны растут в цене и на них уменьшается спрос заграницы; б) происходит уменьшение P^Z, что приводит к *росту импорта* в страну, так как товары заграницы дешевеют и на них увеличивается спрос.

При *уменьшении* θ: а) происходит уменьшение P, что приводит к *увеличению* экспорта из страны, так как товары данной страны дешевеют и на них увеличивается спрос заграницы; б) происходит увеличение P^Z, что приводит к *сокращению импорта* в страну, так как товары заграницы дорожают и на них уменьшается спрос.

Пусть $E_0 > 0$ – часть экспорта, независимая от θ (например, товары, которые производятся только в этой стране);

$$g = \frac{dE}{d\theta} < 0 \qquad (3)$$

есть *предельная склонность к экспорту*, показывающая, на сколько единиц изменится экспорт в связи с изменением θ на одну единицу. Тогда *функция спроса заграницы* на рынке благ этой страны (*функция экспорта этой страны*) представляется в виде

$$E = E(\theta) = E_0 + g\theta. \qquad (4)$$

Заграница не только покупает, но и продаёт блага на рынке данной страны. Объём спроса субъектов экономической деятельности на импортные товары Z определяется теми же факторами, что и объём спроса на отечественные блага. Поэтому *кейнсианская функция импорта* представляется в виде (см. (1.1)):

$$Z(Y) = Z_0 + Z_Y Y,\ Z_0 > 0,\ Z_Y = \frac{dZ}{dY} > 0,\ Z = Z(\underset{+}{Y}), \qquad (5)$$

где Z_0 – независимый от дохода спрос на импорт, Z_Y – *предельная склонность к потреблению импортных благ*, показывающая, на сколько единиц увеличится спрос на импорт при увеличении дохода Y на единицу. Обычно

$$Z_Y < C_Y. \qquad (6)$$

Поскольку неоклассическая функция спроса имеет вид

$$C(i) = C_a + Y - ai = C_0 - ai,\ a > 0,\ C = C(\underset{-}{i}),$$

то *неоклассическая функция импорта* представляется в виде

$$Z(i) = Z_0 - bi,\ b > 0,\ Z = Z(\underset{-}{i}), \qquad (7)$$

где i – ставка процента, b – параметр, показывающий, на сколько единиц сократится импорт при увеличении ставки процента на единицу.

Вывод. Как и спрос на отечественные блага, спрос на импортные блага является возрастающей функцией дохода Y и убывающей функцией ставки процента i.

2.5. *Совокупный спрос*

Совокупный спрос на рынке благ Y^D равен сумме всех спросов (потребительского C, инвестиционного I, государства G, заграницы Z), математические модели которых в кейнсианской и неоклассической концепциях были построены в предыдущих пунктах. Вводя в рассмотрение функцию чистого экспорта N как разность между экспортом E и импортом Z, т.е.

$$N = E - Z, \tag{1}$$

и выделяя существенные зависимости, получаем следующие выражения для Y^D в упомянутых концепциях:

Кейнсианская

$$Y^D = C(\underset{+}{Y}) + I(\underset{+}{k^*}, \underset{-}{i}) + G + N(\underset{-}{\theta}, \underset{-}{Y}). \tag{2}$$

Неоклассическая

$$Y^D = C(\underset{-}{i}) + I(\underset{+}{r}, \underset{-}{i}) + G + N(\underset{-}{\theta}, \underset{+}{i}). \tag{3}$$

Вывод. Принципиальная особенность кейнсианской модели формирования совокупного спроса состоит в том, что в ней присутствует обратная связь: с одной стороны, величина Y^D определяется объёмом потребления домашних хозяйств $C(Y)$ и чистым экспортом N, а с другой – обе эти составляющие совокупного спроса зависят от объёма произведённого национального дохода Y, который в свою очередь зависит от спроса. Таким образом, в кейнсианской модели определяющим фактором является спрос на блага, а в неоклассической – предложение благ.

2.6. *Равновесие на рынке благ в кейнсианской концепции*

Основное предположение в кейнсианской концепции равновесия на рынке благ заключается в следующем: при фиксированном уровне цен предложение благ *эластично*, т.е. предпринимательский сектор при заданном уровне цен всегда готов предложить столько благ, каков на них спрос.

Свой доход домашние хозяйства направляют на потребление $C(Y)$, сбережение $S(Y)$, уплату налогов $T(Y)$ и оплату импорта $Z(Y)$. Таким образом, величина

$$Y^P = C(Y) + S(Y) + T(Y) + Z(Y) \tag{1}$$

определяет *расходование* дохода Y . Условием *равновесия* на рынке благ является условие

$$Y^P = Y^D, \tag{2}$$

т.е., согласно (1) и (5.2), условие

$$C(Y) + S(Y) + T(Y) + Z(Y) = C(Y) + I(i) + G + N(Y), \tag{3}$$

где i – ставка процента. Выделяя существенное в зависимостях, полученных в предыдущих пунктах, имеем

$$S(Y) = S_Y Y,\ T(Y) = T_Y Y,\ Z(Y) = Z_Y Y,\ I(i) = I_i(k^* - i), \tag{4}$$

где k^* предельная эффективность капитала.

Теорема 5. Множество равновесных значений $(Y;i)$ дохода Y и процентной ставки i удовлетворяют условию

$$\zeta(\underset{+}{Y}) = \gamma(\underset{-}{i}) \tag{5}$$

и определяется в виде зависимостей $Y = Y(i)$ либо $i = i(Y)$ следующим образом:

$$Y = \frac{A - I_i i}{\zeta_Y},\ i = \frac{A - \zeta_Y Y}{I_i}. \tag{6}$$

В (4), (5)

$$A = I_i k^* + G + N, \tag{7}$$

$$\zeta_Y = S_Y + T_Y + Z_Y\,, \tag{8}$$

функция $\zeta(Y)$, определяющая все «оттоки» из спроса на рынке благ, имеет вид

$$\zeta(Y) = (S_Y + T_Y + Z_Y)Y = \zeta_Y Y, \qquad (9)$$

а функция $\gamma(i)$, определяющая все «притоки», имеет вид

$$\gamma(i) = I(i) + G + N = A - I_i i. \qquad (10)$$

Доказательство. Условие (5) следует в результате использования (4) в (3) с учётом (7) – (10). Подстановка (9), (10) в (5) даёт

$$\zeta_Y Y = A - I_i i. \qquad (11)$$

Тогда формулы (6) следуют из (11).

Представим указанное множество $\{Y;i\}$ в виде геометрического места точек на плоскости (Y,i) (рис. 11) – линия IS.

В квадранте II представлен график «притока» $\gamma(\underset{-}{i})$, как убывающей функции ставки процента i. В квадранте IV представлен график «оттока» $\zeta(\underset{+}{Y})$ как возрастающей функции дохода Y. Прямая L в квадранте III является вспомогательной линией.

На основе этих построений находится в квадранте I множество равновесных состояний $\{Y;i\}$ на рынке благ – прямая IS.

Например, при $Y = Y_0$ «отток» равен ζ_0, а равный ему приток γ_0, что обеспечивается ставкой процента i_0. Точка A_0 представляет равновесное состояние (Y_0,i_0). Аналогично проводятся построения для каждой другой пары (Y_1,i_1), которой соответствует точка A_1 на линии IS. Точки, расположенные выше линии IS, представляют собой такие сочетания (Y_B,i_2) дохода Y_B и ставки процента i_2, при которых на рынке благ предложение превышает спрос. Действительно, доходу Y_B соответствует равновесное значение i_{B} ставки процента. Поскольку $i_2 > i_B$, то $I(i_2) < I(i_B)$, объём совокупного спроса окажется меньше своего равновесного значения. Таким образом, точки B^B соответствуют избытку на рынке благ. Соответственно, точки B^H, расположенные ниже линии *IS*, представляют собой такие сочетания (Y_B,i_3), при которых на рынке благ спрос превышает предложение, т.е. точки B^H соответствуют дефициту на рынке благ.

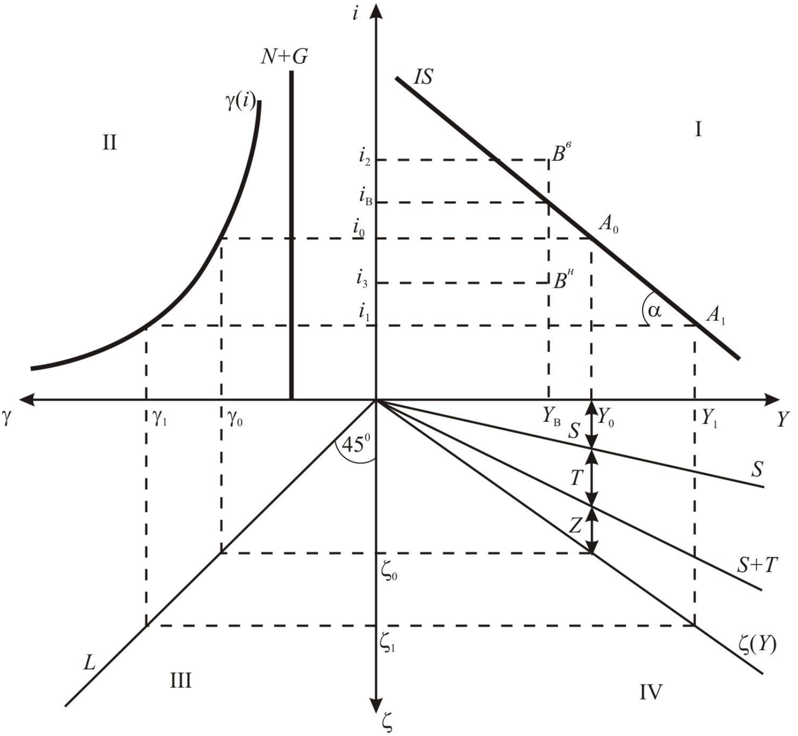

Рис. 11

Проведём анализ полученного результата. Так как $i > 0$, то из (6) следует, что равновесие на рынке благ возможно лишь при условии

$$A > \zeta_Y Y, \qquad (12)$$

из которого следует, что величина $\zeta_Y Y$ является минимально необходимой величиной совокупного спроса. При этом

$$i_{\max} = \frac{A}{I_i},\ Y_{\max} = \frac{A}{\zeta_Y}. \qquad (13)$$

Так как, согласно (6), $\zeta_Y Y = A - I_i i$, то отсюда следует, что $\zeta_Y \Delta Y = -I_i \Delta i$. Таким образом (см. рис 11)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta i}{\Delta Y} = -\frac{\zeta_Y}{I_i}. \qquad (14)$$

Из (14) с учётом (8) следует, что *IS* становится более крутой при увеличении предельных склонностей к сбережению S_Y, потреблению импортных благ Z_Y и налоговой ставки T_Y, и более пологой при увеличении предельной склонности к инвестированию I_i.

2.7. *Мультипликативные эффекты*

Если I – объём инвестиций, G – государственные расходы, C_Y – предельная склонность к потреблению, T_Y – ставка подоходного налога, то национальный доход будет определяться в виде

$$Y = C_Y(Y - T_Y Y) + I + G = C_Y(1 - T_Y)Y + I + G, \qquad (1)$$
$$0 < C_Y < 1,\ 0 < T_Y < 1.$$

В данном пункте рассматривается следующий вопрос: как будет меняться величина равновесного национального дохода в результате изменения поведения субъектов экономической деятельности. При этом воздействие частного сектора заключается в изменении инвестиций I, а воздействие государства – в изменении государственных расходов G и ставки подоходного налога T_Y.

Предположим, что предпринимательский сектор увеличивает объём инвестиций на величину ΔI. Чтобы сохранилось равновесие на рынке благ, предложение должно увеличиваться на некоторую величину ΔY.

Теорема 5. Рост национального дохода ΔY при увеличении инвестиций на величину ΔI определяется формулой

$$\Delta Y = \frac{1}{1 - C_Y(1 - T_Y)} \Delta I = \kappa_u \Delta I, \qquad (2)$$

и при этом для мультипликатора

$$\kappa_u = \frac{1}{1 - C_Y(1 - T_Y)} \qquad (3)$$

справедливо свойство

$$\kappa_u > 1. \qquad (4)$$

Доказательство. Из (1) следует

$$Y + \Delta Y = C_Y(1 - T_Y)(Y + \Delta Y) + I + \Delta I + G =$$
$$= C_Y(1 - T_Y)Y + C_Y(1 - T_Y)\Delta Y + I + \Delta I + G =$$
$$= Y + C_Y(1 - T_Y)\Delta Y + \Delta I.$$

Отсюда

$$\Delta Y = C_Y(1 - T_Y)\Delta Y + \Delta I. \qquad (5)$$

Тогда (2) следует из (5), а свойство (4) очевидно, так как согласно (1),

$$0 < 1 - C_Y(1 - T_Y) < 1. \qquad (6)$$

Следствие. Пусть $\kappa_u^0 = \kappa_u$ при $T_Y = 0$. Тогда

$$\Delta Y^0 = \frac{1}{(1 - C_Y)} \Delta I = \kappa_u^0 \Delta I,\ \kappa_u^0 = \frac{1}{(1 - C_Y)}, \qquad (7)$$

и при этом

$$\kappa_u^0 > \kappa_u > 1. \qquad (8)$$

Выводы. Рост инвестиций на единицу увеличивает национальный доход больше, чем на единицу. Так как κ_u увеличивается при уменьшении T_Y и в пределе

$$\max \Delta Y = \Delta Y^0, \qquad (9)$$

то увеличение национального дохода за счёт инвестиций тем больше, чем меньше ставка подоходного налога. Таким образом, величина мультипликатора уменьшается при введении подоходного налога, и он тем меньше, чем больше налоговая ставка.

Пусть предпринимательский сектор увеличивает объём инвестиций на ΔI, а государство увеличивает объём расходов на величину ΔG. Чтобы сохранить равновесие на рынке благ, предложение должно увеличиться на некоторую величину ΔY.

Теорема 6. Рост национального дохода ΔY при увеличении инвестиций на величину ΔI и расходов государства на величину ΔG определяется формулой

$$\Delta Y = \kappa_u(\Delta I + \Delta G), \qquad (10)$$

где мультипликатор κ_u имеет вид (3).

Вывод формулы (10) аналогичен выводу формулы (2). Из сравнения (10) и (2) следуют те же самые выводы относительно свойств мультипликатора κ_u. При отсутствии увеличения инвестиций, когда $\Delta I = 0$, из (10) следует, что

$$\Delta Y = \kappa_u \Delta G. \qquad (11)$$

Вывод. Мультипликативный эффект со стороны государства за счёт увеличения расходов аналогичен мультипликативному эффекту со стороны частного сектора за счёт инвестиций.

Рассмотрим теперь, какое влияние на величину национального дохода оказывает изменение ставки подоходного налога T_Y на величину ΔT_Y.

Теорема 7. Изменение национального дохода при изменении ставки подоходного налога на величину ΔT_Y определяется формулой

$$\Delta Y = -\frac{C_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)}\Delta T = \kappa_H \Delta T, \qquad (12)$$

где

$$\kappa_H = -\frac{C_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)} = -C_Y \kappa_u, \tag{13}$$

а

$$\Delta T = \Delta T_Y (Y + \Delta Y) \tag{14}$$

есть изменение налоговых поступлений вследствие изменения налоговой ставки T_Y на ΔT_Y.

Доказательство. Из (1) с учётом (14) следует

$$Y + \Delta Y = C_Y [(Y + \Delta Y) - (T_Y + \Delta T_Y)(Y + \Delta Y)] + I + G =$$
$$= C_Y Y + C_Y \Delta Y - C_Y T_Y Y - C_Y \Delta T_Y Y - C_Y T_Y \Delta Y -$$
$$- C_Y \Delta T_Y \Delta Y + I + G =$$
$$= C_Y (Y - T_Y Y) + I + G + C_Y (1 - T_Y) \Delta Y - C_Y \Delta T_Y (Y + \Delta Y) =$$
$$= Y + C_Y (1 - T_Y) \Delta Y - C_Y \Delta T_Y (Y + \Delta Y) =$$
$$= Y + C_Y (1 - T_Y) \Delta Y - C_Y \Delta T.$$

Отсюда

$$\Delta Y = C_Y (1 - T_Y) \Delta Y - C_Y \Delta T. \tag{15}$$

Тогда (12) следует из (15).

Следствие. Так как

$$\kappa_H < 0, \tag{16}$$

то при увеличении ставки подоходного налога на величину ΔT_Y, т.е при $\Delta T_Y > 0$, происходит сокращение национального дохода. Если $\Delta T_Y < 0$, то

$$\Delta Y = |\kappa_H| |\Delta T|, \tag{17}$$

т.е. при уменьшении ставки подоходного налога происходит увеличение национального дохода.

Выводы. Так как $0 < C_Y < 1$, то из (3), (13) следует, что

$$\kappa_u > |\kappa_H|, \tag{18}$$

т.е. по абсолютной величине инвестиционный мультипликатор превосходит налоговый мультипликатор. Таким образом, рост национального дохода за счёт роста государственных расходов на определённую величину будет превосходить рост национального дохода за счёт снижения на такую же величину размера налогообложения.

Рассмотрим влияние государственных расходов и ставки подоходного налога на состояние госбюджета. Если государственные расходы G превысят налоговые поступления $T_Y Y$, то образуется бюджетный дефицит

$$\delta = G - T_Y Y. \tag{19}$$

Теорема 8. Рост бюджетного дефицита $\Delta\delta$ при увеличении государственных расходов на величину ΔG определяется формулой

$$\Delta\delta = \left[1 - \frac{T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)}\right]\Delta G = \kappa_\delta^G \Delta G, \tag{20}$$

и при этом для мультипликатора

$$\kappa_\delta^G = 1 - \frac{T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)} = 1 - \kappa_u T_Y \tag{21}$$

справедливо свойство

$$0 < \kappa_\delta^G < 1. \tag{22}$$

Доказательство. Так как изменение G на величину ΔG вызывает изменение дохода на величину ΔY, то из (19) следует, что

$$\Delta\delta = \Delta G - T_Y \Delta Y. \tag{23}$$

Так как согласно (10), (13),

$$\Delta Y = \frac{1}{1 - C_Y(1 - T_Y)}\Delta G, \tag{24}$$

то использование (24) в (23) приводит к (20). Так как

$$\kappa_\delta^G = \frac{[1 - C_Y(1 - T_Y)] - T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)}, \tag{25}$$

то $\kappa_\delta^G < 1$, что доказывает правую часть неравенства (22). Последовательно получаем

$$T_Y - [1 - C_Y(1 - T_Y)] = T_Y - 1 + C_Y - C_Y T_Y = \\ = T_Y(1 - C_Y) - (1 - C_Y). \tag{26}$$

Так как $0 < T_Y < 1$, то из (26) следует, что

$$T_Y - [1 - C_Y(1 - T_Y)] < 0, \tag{27}$$

т.е.

$$0 < \frac{T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)} < 1. \qquad (28)$$

Использование (28) в (21) даёт $\kappa_\delta^G > 0$, что доказывает левую часть неравенства (22).

Выводы. Из (20), (22) следует, что $\Delta\delta < \Delta G$, т.е. рост бюджетного дефицита отстаёт от роста государственных расходов. Этот эффект объясняется тем, что с ростом государственных расходов увеличиваются доходы населения, а следовательно, и налоговые поступления, которые частично покрывают государственные расходы.

Пусть теперь государственные расходы постоянны, а налоговая ставка изменяется на величину ΔT_Y.

Теорема 9. Изменение бюджетного дефицита при изменении ставки подоходного налога на величину ΔT_Y определяется формулой

$$\Delta\delta = -\left[1 - \frac{C_Y T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)}\right]\Delta T = \kappa_\delta^T \Delta T\,, \qquad (29)$$

где ΔT – изменение налоговых поступлений вследствие изменения налоговой ставки T_Y на ΔT_Y определяется формулой (14). При этом для мультипликатора

$$\kappa_\delta^T = -\left[1 - \frac{C_Y T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)}\right] = -(1 - C_Y T_Y \kappa_u) \qquad (30)$$

справедливы свойства

$$\kappa_\delta^T < 0,\ 0 < \left|\kappa_\delta^T\right| < 1. \qquad (31)$$

Доказательство. Так как изменение T_Y на величину ΔT_Y вызывает изменение дохода на величину ΔY, то из (19), с учётом (14), следует

$$\begin{aligned}\delta + \Delta\delta &= G - (T_Y + \Delta T_Y)(Y + \Delta Y) = \\ &= G - T_Y(Y + \Delta Y) - \Delta T_Y(Y + \Delta Y) \\ &= G - T_Y Y - T_Y \Delta Y - \Delta T = \delta - T_Y \Delta Y - \Delta T.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta\delta = - T_Y \Delta Y - \Delta T. \qquad (32)$$

Так как изменение налоговой ставки на ΔT_Y вызывает изменение национального дохода на величину ΔY, определяемую формулой (12), то из (12), (32) следует, что

$$\Delta\delta = \frac{C_Y T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)}\Delta T - \Delta T = -\left[1 - \frac{C_Y T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)}\right]\Delta T,$$

т.е. пришли к (29). Так как $0 < C_Y < 1$, то

$$\frac{T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)} > \frac{C_Y T_Y}{1 - C_Y(1 - T_Y)}. \qquad (33)$$

Тогда свойства (31) следуют из (28), (30), а из (21), (30) следует, что

$$\kappa_\delta^G < \left|\kappa_\delta^T\right|. \qquad (34)$$

Выводы. Так как мультипликатор κ_δ^T отрицательный, то при увеличении ставки подоходного налога на величину ΔT_Y, т.е. при $\Delta T_Y > 0$, что вызывает увеличение налоговых поступлений на величину ΔT, происходит сокращение дефицита государственного бюджета. При уменьшении ставки подоходного налога на величину ΔT_Y, т.е. при $\Delta T_Y < 0$, что вызывает сокращение налоговых поступлений на величину ΔT, происходит увеличение бюджетного дефицита.

Из (34) следует, что по абсолютной величине государственный мультипликатор превосходит налоговый мультипликатор. Таким образом, рост бюджетного дефицита за счёт уменьшения налоговых поступлений на некоторую величину превосходит рост бюджетного дефицита за счёт увеличения государственных расходов на такую же величину. Этот эффект объясняется тем, что с ростом государственных расходов увеличиваются доходы населения, а следовательно, и налоговые поступления, которые частично покрывают государственные расходы.

Замечание. Если рассмотреть мультипликативные эффекты, индуцированные за границей, то они будут аналогичны эффектам, индуцированным инвестициями частного сектора или государственными расходами, поскольку в правой части (1) появится дополнительное слагаемое Z.

Глава 6. Рынок денег

§1. Общие понятия. Функции денег

Под *рынком денег* в макроэкономике понимается совокупность отношений между банковской системой, создающей всеобщее платёжное средство – деньги, и «публикой», определяющей спрос на них. «Публикой» считаются все экономические субъекты кроме банков.

Деньги – это то, что общество признаёт деньгами, и это наиболее общее их определение. Термин «деньги» используется как удобное краткое наименование сложного агрегата – денежной массы, состоящей из ряда субагрегатов, таких как высокоэффективные (high-powered) или чистые (pure) деньги, почти деньги (near money), прочие ликвидные активы. Эти субагрегаты объединяют отдельные компоненты денежной массы, отличающиеся степенью своей «денежности», а также тем, в какой мере они выполняют приписываемые деньгам функции как всеобщего платёжного средства, и насколько они ликвидны, т.е. способны превратиться в другие виды имущества без потери ценности.

Деньгам приписываются три основные функции: средство платежа, средство счёта, средство сохранения ценности.

Средство платежа. Существование денег как всеобщего платёжного средства позволяет разделить акт обмена товарами на два отдельных акта – куплю и продажу. Платежи осуществляются тремя способами: 1) путём передачи денежных знаков; 2) посредством записей на счетах в банках; 3) документами, удостоверяющими задолженность одного лица другому. Этим способам соответствуют три вида платёжных средств: 1) наличные деньги (банкноты, монеты); 2) жиро-деньги (чеки, текущие счета); 3) долговые деньги (векселя, обязательства). Первые два вида создаются банковской системой, а третий – не банками.

Средство счёта. Пусть в экономике обращается n различных товаров. Тогда в безденежной экономике будет $\frac{n(n-1)}{2}$ относительных цен, т.е. цен i-го товара относительно j-го товара. В денежной экономике все сделки осуществляются посредством промежуточного обмена товара на деньги, т.е. количество денежных цен будет равно n, меньше в $\frac{n-1}{2}$ раз количества цен в безденежной экономике. Можно представить выигрыш, если в современной экономике $n > 10^7$.

Замечание. Деньги как средство платежа и как средство счёта не всегда совпадают. Как правило, в периоды стабильного состояния экономики они совпадают, а в периоды высокой инфляции в качестве средства счёта обычно используется стабильная иностранная валюта, а в качестве средства платежа – отечественная валюта.

Средство сохранения ценности. Получив деньги за проданные товары или услуги, люди в обычных условиях не стремятся немедленно истратить их. Сохраняя часть их в течение некоторого времени, они сохраняют и представляемую ими ценность. Однако для сохранения ценности годятся помимо денег и другие активы – акции, облигации, недвижимость, которые в отличие от денег приносят их владельцам доход. Однако как средство сохранения ценности деньги имеют определённые преимущества. Во-первых, они легко и быстро конвертируются в другие виды имущества, что придаёт их ценности определённость. Во-вторых, деньги в большей мере, чем другие средства, обладают свойством передаваемости, причём передача денег не сопровождается уменьшением сохраняемой ими ценности. Эти два свойства – определённость и передаваемость – характеризуют *ликвидность*. Хотя все виды имущества и активов обладают в той или иной мере этим свойством, деньги являются наиболее ликвидной формой сохранения ценности. Тем не менее в современной высокоразвитой экономике наибольшее значение имеет способность денег служить средством платежа, тогда как их способность сохранять ценность менее важна, поскольку развитый финансовый рынок предоставляет для этого иные более эффективные средства.

§2. Измерение денежной массы. Создание денег банковской системой

Центральные банки (ЦБ) обычно структурируют денежную массу по степени ликвидности её компонентов. По мере снижения ликвидности в число компонентов денежной массы включаются активы, всё в меньшей мере способные выполнять функцию средства платежа и всё в большей степени пригодные служить средством сохранения ценности. В соответствии с этим выделяются четыре агрегата денежной массы: $M0$, $M1$, $M2$, $M3$.

$M0$: наличные в обращении деньги;

$M1$:

1) $M0$;
2) депозиты населения в сбербанках до востребования;
3) депозиты населения и предприятий в коммерческих банках до востребования;
4) средства населения и предприятий на расчётных и текущих счетах.

$$M1 = M0 + 2) + 3) + 4). \tag{1}$$

$M2$:

1) $M1$;
2) срочные вклады в сбербанках:

$$M2 = M1 + 2)\text{.} \qquad (2)$$

$M3$:

1) $M2$;
2) депозитные сертификаты банков;
3) облигации государственного займа:

$$M3 = M2 + 2) +3)\text{.} \qquad (3)$$

Таким образом, если M – вся денежная масса, то

$$M = M0 + M1 + M2 + M3\text{.} \qquad (4)$$

Замечание. Чем менее развита страна, тем большую долю M составляют наличные деньги. Под деньгами в *узком смысле* в макроэкономике подразумевается агрегат $M1$.

Центральный банк. Основу денежной массы страны составляют банкноты и монеты, поэтому их называют *денежной базой*. Общий размер денежной базы страны определяется по балансу ЦБ, который представлен в табл. 1.

Таблица 1

Актив		Пассив	
1. Валютные резервы (золото и иностранная валюта)	ВР	1. Наличные деньги в обращении	НДО
2. Ценные бумаги	ЦБ	2. Депозиты коммерческих банков	ДКБ
3. Кредиты коммерческим банкам	ККБ	3. Депозиты правительства	ДП
4. Кредиты правительству	КП	4. Прочие пассивы	ПП
5. Прочие активы	ПА		

Баланс ЦБ в виде *балансового уравнения* равенства активов и пассивов имеет вид

$$\text{ВР+ЦБ+ККБ+КП+ПА = НДО+ДКБ+ДП+ПП.} \qquad (5)$$

Чистая задолженность правительства (ЧЗП) определяется величиной

$$\text{ЧЗП = КП – ДП.} \qquad (6)$$

Тогда балансовое уравнение запишется в виде

$$\text{ВР + ЦБ + ККБ +ЧЗП} + \Delta\text{П = НДО + ДКБ,} \qquad (7)$$

где ΔП = ПА – ПП. Левая часть (7) показывает, как возникает денежная база. Увеличивая свои активы, банк создаёт деньги, а сокращая – уничтожает их. Правая часть (7) показывает, что денежная база распределена между наличными деньгами, находящимися в обращении, и депозитами коммерческих банков в центральном банке. В качестве средств платежа может быть использовано только НДО, а ДКБ служит резервами денежной системы.

Система коммерческих банков. Банкноты, покинувшие Центральный банк, распределяются следующим образом: одна часть оседает в кассе домашних хозяйств и частных фирм, другая часть поступает в коммерческие банки в виде вкладов. Вкладчик обычно получает право оплачивать свои расходы чеками в пределах вложенной в банк суммы. Поэтому наряду с банкнотами в роли платёжных средств используются чеки.

В отличие от Центрального банка, возможности предоставления кредитов которого теоретически безграничны, так как его долговые обязательства являются деньгами, коммерческие банки имеют пределы кредитования. Открывая у себя счета до востребования, они должны считаться с тем, что вкладчик в любой момент может потребовать наличные деньги в объёме своего вклада. Поэтому коммерческим банкам всегда необходимо иметь резервы наличных денег, что ограничивает возможности коммерческих банков.

§3. Общая модель создания денег. Предложение денег

Рассмотрим процесс создания денег *двухуровневой банковской системой* (1-й уровень – ЦБ, 2-й уровень – КБ) в общем виде, используя обозначения:

H – активы Центрального банка (денежная база);

MR – минимальные резервные покрытия коммерческих банков;

UR – избыточные резервы коммерческих банков;

D – чековые (бессрочные) депозиты в коммерческих банках;

MH – наличные деньги в обращении;

K – кредиты коммерческих банков.

Составим в этих обозначениях балансы денежных средств всех трёх участников создания денег: центрального банка, коммерческих банков и «публики», т.е. совокупности всех экономических субъектов, не являющихся банками, включая государство.

Центральный банк приобрёл у населения и государства свои *активы*, расплатившись банкнотами. Одна часть последних образует *актив населения* (MH), другая часть поступает на депозиты в коммерческие банки, образуя их *актив* ($MR+UR$). Депозиты (D) являются активом для населения и пассивом для коммерческих банков. Кредиты коммерческих банков (K) – это часть их актива, но пассив для населения. Эти отношения между активами и пассивами удобно отобразить в виде таблицы.

Таким образом, *процесс создания денег* банковской системой отражается в двух соотношениях:

$$H = MH + MR + UR, \quad (1)$$

$$D = MR + UR + K. \quad (2)$$

Таблица 2

Баланс Центрального банка		Баланс коммерческих банков		Баланс «публики»	
Актив	Пассив	Актив	Пассив	Актив	Пассив
H	MH	MR	D	MH	K
	MR	UR		D	H
	UR	K			

Введём коэффициенты:

$\alpha = \dfrac{MR}{D}$ – норматив минимального резервного покрытия;

$\beta = \dfrac{UR}{D}$ – норматив кассовых остатков коммерческих банков;

$\gamma = \dfrac{MH}{K}$ – доля наличных денег в общей сумме кредитов коммерческих банков.

Тогда

$$H = \alpha D + \beta D + \gamma K, \quad (3)$$

$$D = \alpha D + \beta D + \gamma K. \quad (4)$$

Из (4)

$$K = D(1 - \alpha - \beta). \quad (5)$$

Используя (5) в (3), получим

$$H = D[\alpha + \beta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \alpha)]. \quad (6)$$

Отсюда

$$D = \frac{1}{[\alpha + \beta(1-\gamma) + \gamma(1-\alpha)]} H. \quad (7)$$

Множитель Δ_D, стоящий в (7) перед H, – *это депозитный мультипликатор*: он показывает, на сколько могут возрасти депозиты в коммерческих банках при увеличении денежной базы на единицу.

Из (5) и (7) следует

$$K = \frac{(1-\alpha-\beta)}{[\alpha+\beta(1-\gamma)+\gamma(1-\alpha)}H. \qquad (8)$$

Множитель Δ_K, стоящий в (8) перед H, – это *кредитный мультипликатор*: он показывает, на сколько может увеличиться сумма банковских кредитов населению при увеличении денежной базы на единицу.

Согласно (2.1) агрегат $M1$ денежной массы представим в виде

$$M1 = D + MH, \qquad (9)$$

где $MH = M0$. Далее под деньгами будем понимать деньги в узком смысле, т.е. агрегат $M1$, обозначая его просто M. Тогда

$$M = D + \gamma K. \qquad (10)$$

Из (7), (8), (10) следует, что

$$M = \frac{[1+\gamma(1-\alpha-\beta)]}{[\alpha+\beta(1-\gamma)+\gamma(1-\alpha)]}H. \qquad (11)$$

Множитель $\Delta_M = m(\alpha, \beta, \gamma)$, стоящий в (11) перед H, – это *денежный мультипликатор*: он показывает, на сколько увеличится количество денег в стране при увеличении денежной базы на единицу.

Полученные результаты представим в виде следующего утверждения.

Теорема 1. Составляющие D, K (см. табл. 2) и

$$M = D + MH = D + \gamma K \qquad (12)$$

денежных средств выражаются через активы центрального банка H (денежную базу) в виде

$$D = \Delta_D H, \qquad (13)$$

$$K = \Delta_K H, \qquad (14)$$

$$M = \Delta_M H = m(\alpha, \beta, \gamma)H, \qquad (15)$$

где депозитный мультипликатор Δ_D, кредитный мультипликатор Δ_K и денежный мультипликатор Δ_M определяются формулами

$$\Delta_D = \frac{1}{[\alpha + \beta(1-\gamma) + \gamma(1-\alpha)]}, \tag{16}$$

$$\Delta_K = \frac{(1-\alpha-\beta)}{[\alpha + \beta(1-\gamma) + \gamma(1-\alpha)]}, \tag{17}$$

$$\Delta_M = m(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{[1+\gamma(1-\alpha-\beta)]}{[\alpha + \beta(1-\gamma) + \gamma(1-\alpha)]}. \tag{18}$$

Теорема 2. Пусть

$$0 < \gamma < 1,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1,\ 0 < \alpha + \beta < 1. \tag{19}$$

Тогда

$$\frac{\partial m}{\partial \alpha} < 0,\ \frac{\partial m}{\partial \beta} < 0,\ \frac{\partial m}{\partial \gamma} < 0, \tag{20}$$

т.е. денежный мультипликатор является убывающей функцией параметров α, β и γ.

Замечание. Доказать самостоятельно.

Таким образом, из (15) следует

$$M = m(\underset{-}{\alpha},\underset{-}{\beta},\underset{-}{\gamma})H = M(\underset{-}{\alpha},\underset{-}{\beta},\underset{-}{\gamma},\underset{+}{H}). \tag{21}$$

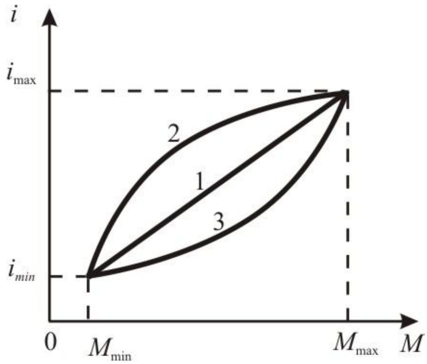

Рис. 1

Параметры β и γ являются убывающими функциями ставки процента i, т.е. $\beta = \beta(\underset{-}{i})$, $\gamma = \gamma(\underset{-}{i})$, так как с ростом i у коммерческих банков увеличивается заинтересованность в снижении избыточных резервов, а у населения – наличных денег.

Тогда, согласно (21), функция предложения денег M может быть представлена в виде

$$M = \underset{-}{m}(\underset{-}{\alpha}, \underset{-}{\beta}(\underset{-}{i}), \underset{-}{\gamma}(\underset{-}{i}))H = M(\underset{+}{i}, \underset{-}{\alpha}, \underset{+}{H}). \qquad (22)$$

Вывод. Чем выше ставка процента i, тем больше предложение денег M при заданной денежной базе H и фиксированной норме резервного покрытия α.

Замечание. На рис. 1 изображены возможные зависимости M от i как возрастающих функций при фиксированных α и H, хотя эти зависимости могут быть более сложными, например с точками перегиба.

§4. Спрос на деньги

Под спросом на деньги понимается желание экономических субъектов иметь в своём распоряжении определённое количество платёжных средств (кассу). Держание кассы лишает её собственника доходов от тех видов имущества, которые он мог бы купить на лежащие в кассе деньги. В связи с этим возникает вопрос: почему экономические субъекты согласны нести эти затраты (потери), предъявляя спрос на деньги?

Д.М. Кейнс выделил три мотива, порождающие этот спрос: 1) транзакционный мотив (спрос на деньги для сделок); 2) мотив предосторожности; 3) спекулятивный мотив (спрос на деньги как имущество).

4.1. *Спрос на деньги для сделок и по мотиву предосторожности*

Пусть Y – доход домашнего хозяйства, который равномерно распределяется до конца единичного временного периода на приобретение необходимых благ. Пусть в начале каждого периода доход не выплачивается наличными, а зачисляется на депозитный счёт с гарантированным процентом i, и оплата покупок осуществляется наличными. Каждая операция по конвертированию части вклада в наличность стоит определённых затрат, состоящих из двух частей: 1) оплаты услуг по конвертированию с нормой h; 2) затрат в виде потери процентного дохода с изымаемой из банка суммы X со средним её значением $\overline{M} = \frac{X}{2}$. Таким образом, общая сумма затрат $TC(X)$ за период между двумя начислениями дохода в банк будет иметь вид

$$TC(X) = h\frac{Y}{X} + i\frac{X}{2}. \tag{1}$$

Таким образом, оптимальный спрос на деньги для сделок $N_{\text{сд}}$ равен среднему минимальному значению $X_{\min}$ изымаемой из банка суммы, при которой обеспечивается сумма затрат $TC(X)$, т.е. $N_{\text{сд}} = X_{\min} /2$. Необходимое условие минимума

$$\frac{dTC(X)}{dX} = 0$$

приводит к уравнению

$$-\frac{hY}{X^2} + \frac{i}{2} = 0,$$

из которого следует

$$X_{\min} = \sqrt{\frac{2hY}{i}}.$$

Отсюда

$$N_{\text{сд}} = \sqrt{\frac{hY}{2i}}.$$

В дальнейшем зависимость $N_{\text{сд}}$ от Y и i при заданной норме транзакционных издержек h будем обозначать функцией

$$N_{\text{сд}} = N_{\text{сд}}(\underset{+}{Y}, \underset{-}{i}). \tag{2}$$

Замечание. Зависимость может иметь и более сложный характер, но с условием: $N_{сд}$ является возрастающей функцией дохода домашнего хозяйства Y и убывающей функцией банковского процента i.

Спрос на деньги по мотиву предосторожности $N_{пр}$ возникает в связи с тем, что могут возникнуть непредвиденные платежи. Вид $N_{пр}$, как функции Y и i, предполагается тем же, что и для $N_{сд}$, т.е.

$$N_{пр} = N_{пр}(\underset{+}{Y}, \underset{-}{i})\,. \tag{3}$$

4.2. *Спрос на деньги как имущество*

В современной экономике имущество экономических субъектов принимает форму *портфеля ценных бумаг*: денег, облигаций, акций и т.д. Полезность денег состоит в абсолютной ликвидности, т.е. деньги как имущество в любой момент могут превратиться в деньги для сделок. При этом спрос на деньги как имущество обратно пропорционален доходности ценных бумаг. Предположим пока, что кроме денег существует лишь один вид ценных бумаг – *государственные облигации* с номинальной стоимостью B_n, выплачиваемым по ним процентом i_n и рыночной (банковской) ставкой процента i, характеризующей доходность облигации. Тогда *текущий* рыночный курс облигации

$$B = \frac{i_n}{i} B_n\,. \tag{4}$$

Решая, хранить ли ценность в денежной форме или в виде облигаций, субъект, кроме дохода на облигацию, учитывает её рыночный курс в будущем B_l, который определяется по формуле

$$B_l = \frac{i_n}{i_l} B_n\,, \tag{5}$$

где i_l – ожидаемое значение ставки процента в будущем. Если владелец облигации ожидает повышения ставки процента ($i_l > i$), то его ожидаемые потери от снижения курса облигации составит величина

$$\Delta B = B - B_l = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i_l}\right) i_n B_n . \qquad (6)$$

Эту ожидаемую потерю он сохраняет до тех пор, пока гарантированный доход от облигаций $i_n B_n$ превышает потери ΔB, т.е. пока сохраняется условие $i_n B_n \geq \Delta B$. Тогда из (6) следует

$$1 \geq \frac{1}{i} - \frac{1}{i_l} . \qquad (7)$$

Определение. Текущая ставка процента $i = i_k$, при которой в (7) достигается равенство, называется *критической.*

Из (7) следует, что

$$i_k = \frac{i_l}{1 + i_l} . \qquad (8)$$

Значение i_k, определяемое формулой (8), является теоретическим, если i_l – точное будущее значение ставки процента. Поскольку в реальной жизни i_l – это некоторое ожидаемое субъектом значение, то каждый субъект имеет своё представление о величине критической ставки процента в виде интервала возможных значений i.

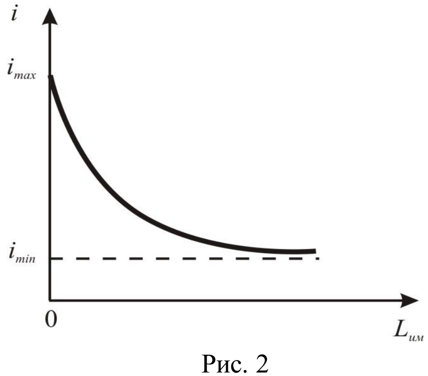

Рис. 2

В соответствии с этим спрос на деньги как на имущество является убывающей функцией ставки процента i (см. рис. 2), т.е.

$$N_{им} = N_{им}(\underset{-}{i}). \qquad (9)$$

При небольших изменениях i эта зависимость представляется в виде линейной функции

$$N_{им} = N_i(i_{max} - i), \qquad (10)$$

где $N_i = \dfrac{dN_{им}}{di}$ – *предельная склонность к предпочтению денег* в качестве имущества, показывающая, на сколько увеличится (уменьшится) спрос на деньги как имущество при уменьшении (увеличении) ставки процента i в интервале $i_{min} \leq i \leq i_{max}$ на один пункт.

Вывод. Спекулятивный спрос на деньги тем выше, чем меньше возможности использовать для сохранения ценности иные финансовые активы.

4.3. *Спрос на деньги и уровень цен*

При повышении уровня цен необходимо учитывать следующие два результата этого процесса. Во-первых, при повышении уровня цен P требуется больше денег для совершения сделок, т.е. спрос на деньги повышается. Во-вторых, при повышении темпа прироста уровня цен π возрастают существующие затраты держателя кассы, что понижает спрос на деньги. В соответствии с этим спрос на деньги с учётом уровня цен представляется в виде

$$N = Pl(\underset{+}{Y}, \underset{-}{i}, \underset{-}{\pi}), \qquad (11)$$

где Y – доход, i – ставка процента. Поскольку влияние π сложно учесть, то обычно оно не учитывается и предполагается, что

$$N = Pl(\underset{+}{Y}, \underset{-}{i}), \qquad (12)$$

где

$$l(\underset{+}{Y},\underset{-}{i}) = N_{\text{сд}}(\underset{+}{Y},\underset{-}{i}) + N_{\text{пр}}(\underset{+}{Y},\underset{-}{i}) + N_{\text{им}}(\underset{-}{i}). \qquad (13)$$

§5. Равновесие на рынке денег

Равновесие на рынке денег достигается, когда предложение денег M равно общему спросу на деньги N, т.е. достигается равенство $M = N$. Тогда с учётом (3.22) и (4.12) получаем

$$M(\underset{-}{\alpha},\underset{+}{H},\underset{+}{i}) = Pl(\underset{+}{Y},\underset{-}{i}), \qquad (1)$$

где:

i – процентная ставка;

Y – доход;

H – денежная база;

α – норма минимального резервного покрытия;

P – уровень цен.

Множество точек $\{Y;\ i\}$на плоскости $(Y,\ i)$, для которого выполняется условие (1), т.е. выполняется условие равновесия на денежном рынке, образует некоторую кривую NM. Построим эту кривую. Как было показано ранее, общий спрос на деньги N состоит из спроса на деньги как имущество $N_{\text{им}}$, для сделок $N_{\text{сд}}$ и из-за предосторожности $N_{\text{пр}}$, т.е.(см. 4.13)

$$N = N_{\text{им}} + N_{\text{сд}} + N_{\text{пр}}. \qquad (2)$$

Было установлено, что для $N_{\text{сд,пр}} = N_{\text{сд}} + N_{\text{пр}}$ существенной является зависимость от Y, а для $N_{\text{им}}$ – от i, т.е.

$$N = N_{\text{им}}(\underset{-}{i}) + N_{\text{сд,пр}}(\underset{+}{Y}) \qquad (3)$$

В квадранте II изображён график $N_{им} = N_{им}(\underset{-}{i})$, т.е. перенесён график с рис. 2, а в квадранте IV – график в виде простейшей линейной функции $N_{\text{сд,пр}} = N_{\text{сд,пр}}(\underset{+}{Y})$. В квадранте III линия MM такова, что $M = N = N_{\text{им}} + N_{\text{сд,пр}}$. На основе этих линий в квадранте I определяется множество точек (Y, i) (линия NM), соответствующих равновесию на рынке денег.

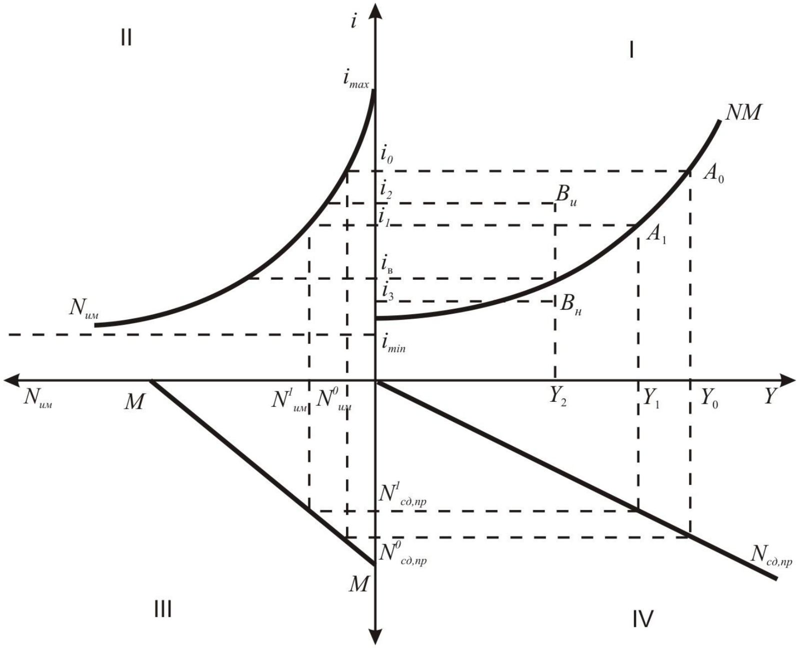

Рис. 3

Ставке процента i_0 соответствует спрос на деньги как имущество $N^0_{им}$. Тогда для сделок и запаса предосторожности остаётся $N^0_{сд,пр}$ денег. Такое количество денег $N^0 = N^0_{им} + N^0_{сд,пр}$ потребуется только в том случае, если доход будет равен Y_0. Точка $A_0 = (Y_0, i_0)$ и будет равновесной точкой.

Можно найти другую равновесную точку $A_1 = (Y_1, i_1)$ в обратной последовательности. При доходе Y_1 спрос на деньги для сделок и из-за предосторожности равен $N^1_{сд,пр}$. Значению $N^1_{сд,пр}$ соответствует $N^1_{им}$, но такое количество денег, как имущество, будет держаться субъектами при ставке процента i_1.

Точки $B_и$, лежащие выше линии NM, соответствуют избытку денег, когда предложение денег превышает их спрос, т.е. в точке $B_и$

$$M(Y_2, i_2) > N(Y_2, i_2). \qquad (4)$$

Действительно, доходу Y_2 соответствует равновесное значение $i_B < i_2$. Но поскольку $N_{им}(i_2) < N_{им}(i_B)$, то предложенное количество денег не потребляется полностью спросом на них. Аналогично показывается, что точки B_H, лежащие ниже линии NM, соответствуют недостатку (дефициту) денег, т.е. в точке $B_н$

$$M(Y_2, i_3) > N(Y_2, i_3).$$

Найдём аналитическое выражение для линии NM для одного частного случая. Согласно (1), (3) можно M представить в виде

$$M = Pl_{сд,пр}(\underset{+}{Y}) + Pl_{им}(\underset{+}{Y}, i) = N_{сд,пр}(\underset{+}{Y}) + N_{им}(\underset{-}{i}). \qquad (5)$$

Представим $l_{сд,пр}(Y)$ в виде

$$l_{сд,пр}(Y) = l_Y Y, \;\; l_Y = \frac{dl_{сд,пр}(Y)}{dY}. \qquad (6)$$

Представим $l_{им}(i)$, с учётом (4.10), в виде

$$l_{им}(i) = l_i(i_{max} - i), \; l_i = \frac{N_i}{P}, \; N_i = \frac{dN_{им}}{di}. \qquad (7)$$

Из (5) – (7) следует

$$\frac{M}{P} = l_Y Y + l_i(i_{max} - i). \qquad (8)$$

Обозначим

$$M^{-} = M - N_i i_{max}. \qquad (9)$$

Тогда из (8) следуют две эквивалентные формулы

$$Y = \frac{M^{-}}{Pl_Y} + \frac{l_i}{l_Y} i, \qquad (10)$$

$$i = -\frac{M^{-}}{Pl_i} + \frac{l_Y}{l_i} Y. \qquad (11)$$

Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения.

Теорема 3. В случае линейного представления $N_{\text{им}}(i)$ в виде (4.10) и линейного представления $N_{\text{сд,пр}}(Y)$ в виде (5), (6) множество равновесных точек (Y,i) на рынке денег, составляющих линию NM, определяется эквивалентными формулами (10), (11).

Замечание. В рассмотренном частном случае линия NM вырождается в прямую.

Глава 7. Рынок капитала

Распределение своих сбережений экономические субъекты осуществляют *через рынок капитала* (финансов) (рис.1), назначение которого – трансформировать сбережения в реальные инвестиции.

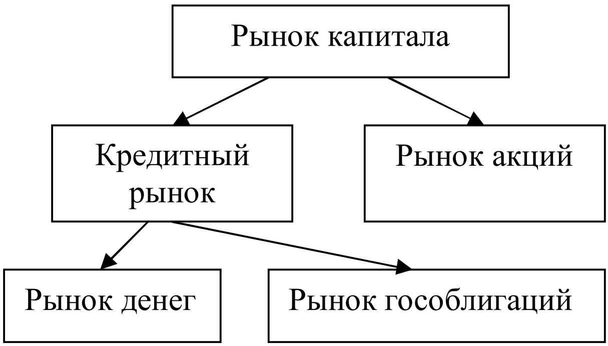

Рис.1

Осуществляется этот процесс путём покупки на рынке *ценных бумаг*, являющихся в общем случае *рисковыми* активами, и формирования из этих активов *портфеля ценных бумаг*. При этом на решение субъекта о распределении общей суммы сбережений между различными видами ценных бумаг влияют четыре основных фактора: 1) доходность конкретного вида ценной бумаги; 2) степень риска полученного дохода; 3) отношение субъекта к риску: 4) транзакционные затраты, связанные с превращением ценной бумаги в деньги и наоборот.

§1. Доходность, риск и оптимизация портфеля ценных бумаг

Через $E\{\cdot\}$ будем обозначать оператор математического ожидания. Тогда для случайной величины x

$$\bar{x} = E\{x\},$$
$$\sigma_x^2 = E\{[x-\bar{x}]^2\}, \qquad (1)$$
$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2},$$
соответственно математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение *x*.

Пусть x и y – две случайные величины соответственно с характеристиками $\bar{x}, \sigma_x^2, \sigma_x$ и $\bar{y}, \sigma_y^2, \sigma_y$. Тогда

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad (2)$$

где

$$\mathrm{cov}(x,y) = E\{[x-\bar{x}][y-\bar{y}]\} \qquad (3)$$

есть коэффициент корреляции, характеризующий статистическую зависимость между x и y. При этом

$$0 \le \left|\rho_{xy}\right| \le 1. \qquad (4)$$

Пусть

$$z = ax + by. \qquad (5)$$

Тогда

$$E\{z\} = \bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}, \qquad (6)$$

$$\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}. \qquad (7)$$

Доходность ценной бумаги $\bar{r}$ – это ожидаемое увеличение её относительной стоимости r за некоторый временной период, т.е. математическое ожидание случайной величины, какой является увеличение относительной стоимости. Тогда дисперсия

$$\sigma^2 = E\{[r-\bar{r}]^2\} \qquad (8)$$

характеризует *степень риска* для обладателя этой ценной бумаги.

Рассмотрим задачу формирования портфеля из двух ценных бумаг A и B соответственно с доходностями $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$, рисками σ_A^2, σ_B^2 и коэффициентом корреляции $\rho_{AB} = \dfrac{\operatorname{cov}(A,B)}{\sigma_A \sigma_B}$. Пусть доли этих акций в портфеле равны n_A и n_B и при этом

$$n_A + n_B = 1. \tag{9}$$

Замечание. Отрицательное значение n_A или n_B означает взятие соответствующей ценной бумаги в долг.

Тогда доходность $\bar{r}_P$ и риск σ_P^2 такого портфеля, согласно (6), (7), (9), будут иметь вид

$$\bar{r}_P = n_A \bar{r}_A + (1 - n_A)\bar{r}_B, \tag{10}$$

$$\sigma_P^2 = n_A^2 \sigma_A^2 + (1 - n_A)^2 \sigma_B^2 + 2n_A(1 - n_A)\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}. \tag{11}$$

Проведём анализ соотношений (10), (11). Пусть $\bar{r}_{\max} = \max(\bar{r}_A, \bar{r}_B)$. Тогда для доходности портфеля $\bar{r}_P$ справедливо соотношение

$$\bar{r}_P \le n_A \bar{r}_{\max} + (1 - n_A)\bar{r}_{\max} = \bar{r}_{\max},$$

т.е.

$$\bar{r}_P \le \bar{r}_{\max}. \tag{12}$$

Так как $|\rho_{AB}| \le 1$, то из (11) следует

$$\sigma_P^2 \le n_A^2 \sigma_A^2 + (1 - n_A)^2 \sigma_B^2 + 2n_A(1 - n_A)\sigma_A \sigma_B =$$

$$= (n_A \sigma_A + n_B \sigma_B)^2.$$

Поскольку все величины неотрицательны, то

$$\sigma_P \le n_A \sigma_A + n_B \sigma_B = n_A \sigma_A + (1 - n_A)\sigma_B. \tag{13}$$

Пусть $\sigma_{\max} = \max(\sigma_A, \sigma_B)$. Тогда из (13) следует

$$\sigma_P \le \sigma_{\max}. \tag{14}$$

Свойства (12) и (14) означают следующее.

Вывод: При любых значениях n_A и n_B, удовлетворяющих условию (9), доходность портфеля не превышает доходность наиболее доходной ценной бумаги, а риск портфеля не превышает риска наиболее рисковой ценной бумаги.

Задача оптимального формирования портфеля ценных бумаг заключается в следующем: найти значения n_A^* и n_B^*, минимизирующие риск портфеля, т.е. оптимальные в смысле

$$\sigma_P^2 \to \min . \tag{15}$$

Необходимым условием минимума σ_P^2, определяемого формулой (11), по n_A является условие

$$\frac{d\sigma_P^2}{dn_A} = 2n_A\sigma_A^2 - 2(1-n_A)\sigma_B^2 + 2(1-2n_A)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB} = 0. \tag{16}$$

Решение (16) относительно n_A совместно с (9) даёт оптимальную структуру портфеля

$$n_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}},$$
$$n_B^* = 1 - n_A^* = \frac{\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}. \tag{17}$$

Достаточное условие минимума

$$\frac{d^2\sigma_P^2}{dn_A^2} > 0 . \tag{18}$$

Из (16) следует

$$\frac{d^2\sigma_P^2}{dn_A^2} = 2\sigma_A^2 + 2\sigma_B^2 - 4\sigma_A\sigma_B\rho_{AB} =$$
$$= 2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}). \tag{19}$$

Так как $\inf\left(\dfrac{d^2\sigma_P^2}{dn_A^2}\right)$ достигается при $\rho_{AB} = +1$, причём $\inf\left(\dfrac{d^2\sigma_P^2}{dn_A^2}\right) = 2(\sigma_A - \sigma_B)^2 > 0$, то условие (18) выполняется, т.е. решение (17) действительно минимизирует риск портфеля.

Коэффициент корреляции ρ_{AB} может принять одно из трёх предельных значений.

Ситуация 1: случай *отсутствия корреляции* между доходностями ($\rho_{AB} = 0$). В этом случае

$$n_A^* = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2},\ n_B^* = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}, \tag{20}$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma_A^2 \sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}. \tag{21}$$

Формулы (20) следуют из (17), а (21) – в результате подстановки (20) в (11).

Ситуация 2: случай *полной отрицательной* корреляции между доходностями ($\rho_{AB} = -1$), когда тенденция к росту и понижению доходностей являются противоположными для различных ценных бумаг. В этом случае

$$n_A^* = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B},\ n_B^* = \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}, \sigma_P^2 = 0, \tag{22}$$

т.е. портфель имеет *нулевой риск*.

Ситуация 3: случай *полной положительной* корреляции между доходностями ($\rho_{AB} = +1$), когда тенденции к росту и понижению доходностей являются идентичными для различных ценных бумаг. Тогда

$$n_A^* = \frac{\sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B},\ n_B^* = \frac{\sigma_A}{\sigma_A - \sigma_B}, \sigma_P^2 = 0, \qquad (23)$$

т.е. и в этом случае портфель имеет *нулевой риск*, но при этом один из типов ценных бумаг берётся в долг, так как либо n_A^*, либо n_B^* являются отрицательными, причём берётся в долг актив с *меньшим* риском для *перераспределения* его в пользу актива с *большим* риском.

§2. Формирование портфеля с учётом предпочтений инвесторов

По своему отношению к доходу и риску субъекты экономической деятельности делятся на три типа:

1) *равнодушные* к риску, которые считают, что их благополучие остаётся неизменным, если доходность и риск растут в равной мере;

2) *предрасположенные* к риску, которые допускают отставание роста доходности от роста риска;

3) *нерасположенные* к риску, которые допускают возрастание риска портфеля только в том случае, если доходность портфеля возрастает в большей мере, чем риск.

Исследования показали, что большинство субъектов экономической деятельности относятся к третьему типу. Рассмотрим возможный подход к формированию портфеля этого типа инвестора.

Вводится *функция полезности* $U(\bar{r}_P, \sigma_P) \geq 0$, являющаяся *возрастающей* функцией доходности $\bar{r}_P$ и *убывающей* функцией риска σ_P портфеля. М. Рубинштейн (M.E. Rubinstein) предложил функцию вида

$$U(\bar{r}_P, \sigma_P) = \psi \bar{r}_P - \sigma_P^2, \psi > 0. \qquad (1)$$

Если взять $U(\bar{r}_P, \sigma_P) = \hat{U} = \text{const}$, то из (1) следует кривая безразличия

$$\bar{r}_P(\hat{U}, \sigma_P) = \frac{(\hat{U} + \sigma_P^2)}{\psi}, \qquad (2)$$

определяющая значения доходностей $\bar{r}_P$ портфеля, на которые согласен инвестор при значении риска портфеля σ_P^2 и при уровне полезности портфеля $\hat{U}$. Из (2) следует, что $\frac{\partial^2 \bar{r}_P(\hat{U}, \sigma_P)}{\partial(\sigma_P)^2} > 0$, т.е. кривая безразличия выпукла вниз. Так как $\frac{\partial \bar{r}_P(\hat{U}, \sigma_P)}{\partial \sigma_P} > 0$, то это условие означает, что скорость возрастания доходности выше скорости возрастания риска, что соответствует третьему типу инвестора.

Таким образом, для значений $\hat{U} = U_1$, $\hat{U} = U_2$, $\hat{U} = U_3$, таких, что $U_1 < U_2 < U_3$, семейство кривых безразличия $\bar{r}_P(U_k, \sigma_P)$, $k = \overline{1{,}3}$, имеет вид (рис. 2). Если при заданных $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \sigma_A^2, \sigma_B^2$ для различных наборов $\{n_A$, $n_B\}$ построить, в соответствии с (1.10), (1.11), семейство точек $\{\bar{r}_P; \sigma_P\}$, то получим кривую, изображённую на рис. 3. Для инвестора третьего типа верхняя ветвь *CB* этой кривой предпочтительней нижней *CD*, т.е. набор активов $\{n_A^1, n_B^1\}$, дающий точку $\{\sigma_P^*, r_P^1\}$, более предпочтителен, нежели набор активов $\{n_A^2, n_B^2\}$, дающий точку $\{\sigma_P^*, r_P^2\}$, так как при риске $\sigma_P = \sigma_P^*$ доходность $\bar{r}_P^1$, определяемая первым набором, выше доходности $\bar{r}_P^2$, определяемой вторым набором, т.е. $\bar{r}_P^1 > \bar{r}_P^2$

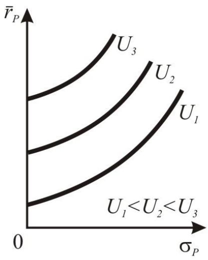

Рис.2

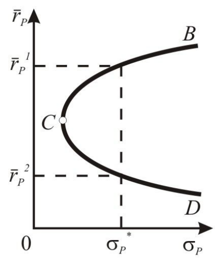

Рис.3

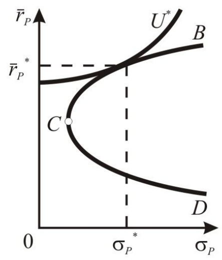

Рис.4

Тогда искомый состав портфеля будет состоять из таких значений $n_A = n_A^*$ и $n_B = n_B^*$, которые дадут точку $\{\sigma_P^*, r_P^*\}$ (рис. 4), которая получается как точка касания ветви *BC* кривой *BCD* с кривой безразличия U^*. Поскольку на этой кривой значение функции безразличия достигает максимального значения, так как кривая U^* является наиболее высокой из возможных кривых $\{U_i\}$ (рис. 2), то такой состав портфеля $\{n_A^*, n_B^*\}$ можно считать *оптимальным в смысле максимизации функции полезности*.

§3. Составление портфеля из рискового и безрискового активов

В современной экономике *имущество* экономических субъектов имеет форму *портфеля ценных бумаг*. С точки зрения таких характеристик, как доходность и риск, можно выделить три основных вида ценных бумаг: 1) *деньги* – это актив, имеющий нулевую доходность и нулевой риск ($\bar{r}_M = 0$, $\sigma_M = 0$); 2) *государственные облигации*, имеющие гарантированную доходность и нулевой риск ($\bar{r}_B > 0$, $\sigma_B = 0$); 3) акции частных фирм, приносящие негарантированные доходы ($\bar{r}_A > 0$, $\sigma_A > 0$). В §1, 2 мы рассмотрели проблему формирования только из *рисковых активов.* Рассмотрим теперь проблему составления портфеля из рисковых и нерисковых активов, взяв в качестве последнего деньги.

Пусть $\bar{r}_P$ – доходность портфеля, состоящего из рисковых активов одного типа. Пусть инвестор формирует финансовый портфель с доходностью $\bar{r}_V$, в котором, кроме рисковых активов, доля которых равна $n_A = n$ с риском σ_P, присутствуют деньги, доля которых равна $n_M = (1 - n)$ и которые могу ссужаться и заниматься по ставке процента i. При этом предполагаем, что инвестор может брать деньги в долг для целей увеличения портфеля. В этом случае

$$(1 - n) < 0,\ n > 1. \tag{1}$$

Так как доходность денег равна ставке процента i, то доходность портфеля из рисковых активов и денег $\bar{r}_V$ будет иметь, согласно (1.10), вид

$$\bar{r}_V = n\bar{r}_P + (1 - n)i = i + n(\bar{r}_P - i). \tag{2}$$

Поскольку у денежной части портфеля нулевой риск, то, согласно (1.11), $\sigma_V = \sqrt{n^2\sigma_P^2}$. Отсюда

$$\sigma_V = n\sigma_P,\ n = \frac{\sigma_V}{\sigma_P}. \tag{3}$$

Тогда из (2), (3) следует

$$\bar{r}_V = i + \frac{(\bar{r}_P - i)}{\sigma_P}\sigma_V. \tag{4}$$

Графически зависимость $\bar{r}_V = \bar{r}_V(\sigma_V)$ вида (4) изображена на рис. 5. Каждая точка прямой M соответствует определённому составу портфеля, т.е. определённому распределению средств между рисковой и нерисковой частями портфеля. При этом возможны три ситуации.

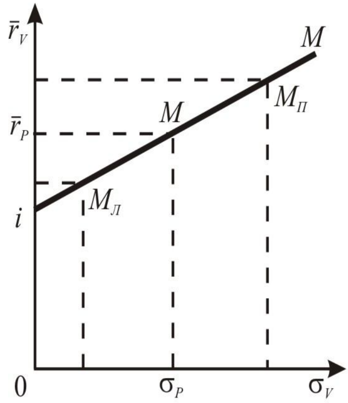

Рис. 5

1) *Точка М*. В этой точке $\sigma_V = \sigma_P$, $\bar{r}_V = \bar{r}_P$. Это означает, что все средства инвестор вложил в рисковые активы.

2) *Точки М*л, т.е. точки, расположенные на прямой *М* левее точки *М*. Для этих точек $\sigma_V < \sigma_P$, т.е. (см. (3))

$$n < 1, (1 - n) < 1. \tag{5}$$

Это означает, что все средства инвестор распределил между рисковыми активами и деньгами.

3) *Точки М*п, т.е. точки, расположенные на прямой *М* правее точки *М*. Для этих точек $\sigma_V > \sigma_P$, т.е.

$$n > 1, (1 - n) < 0. \tag{6}$$

Это означает, что инвестор, кроме портфеля, обладает денежной *задолженностью.* Таким образом, относительно рынка денег инвестор в точках *М*л выступает как *кредитор*, в точках *М*п,– как *заёмщик*, а в точке *М* он вообще не выходит на денежный рынок.

Поскольку государственные облигации, как и деньги, являются также безрисковыми активами, то процесс формирования портфеля из рисковых активов и облигаций имеет аналогичный характер. Только всюду ставка процента *i* должна быть заменена доходностью облигации $\bar{r}_B$. На этом основании деньги и государственные облигации являются взаимозаменяемыми видами активов.

Степень взаимозаменяемости облигаций и акций как составных частей портфеля определяется отношением субъекта к сочетанию дохода и риска, что учитывается функцией полезности $U(\bar{r},\sigma)$. Субъекты, более склонные к риску, рассматривают облигации и акции как взаимозаменяемые части портфеля. Субъекты, предпочитающие минимизировать риск, – как невзаимозаменяемые.

Вывод. На макроэкономическом уровне в экономике рассматриваются лишь два кредитных рынка – денег и государственных облигаций, спрос на которые учтён в предыдущей главе в рамках рассмотрения спроса на деньги как на имущество. Таким образом, кривая *NM*, построенная в предыдущей главе, представляет множество комбинаций уровня национального дохода и ставки процента, соответствующих совместному равновесию на рынке денег и ценных бумаг.

В случае включения в рассмотрение на макроэкономическом уровне также и рынка рисковых ценных бумаг считается, что планы по оптимизации структуры портфеля всех субъектов экономической деятельности совпадают. В этом случае все портфели можно агрегировать в один общий портфель, что приводит к равновесию на всех кредитных рынках.

Вывод: Поскольку стоимости рисковых активов имеют денежный эквивалент, то операции с ними могут трактоваться как спрос на деньги как на имущество. Таким образом, на макроуровне в вопросе существования равновесия на рынках рынок капитала может быть объединён с денежным рынком, равновесие на котором достигается на кривой *NM* (глава 6).

§4. Совместное равновесие на рынках благ, денег и капитала (*IS-NM* модель)

В главах 5 и 6 были определены множества парных значений уровня национального дохода Y и ставки процента i, соответствующие равновесию на рынке благ (линия *IS*), когда совокупное предложение благ Y^S совпадает с совокупным спросом Y^D, и на рынке денег (линия *NM*), когда совокупное предложение денег M совпадает с их совокупным спросом N:

$$\text{блага}\begin{cases} Y^D \text{ – спрос,} \\ Y^S \text{ – предложение;} \end{cases}$$

$$\text{деньги}\begin{cases} N \text{ – спрос,} \\ M \text{ – предложение.} \end{cases}$$

В предыдущих параграфах было установлено, что рынок капитала может быть включен в денежный рынок, и совместное равновесие на денежном рынке и на рынке капитала (ценных бумаг) будет определяться линией *NM*. Совместим обе линии *IS* и *NM* на рис. 6.

Лишь одно сочетание (Y_0,i_0) значений дохода и процентной ставки, представляющее собой координаты точки пересечения *IS* и *NM*, обеспечивает одновременное равновесие на трёх рынках.

Значения Y_0 и i_0 называются *эффективным спросом* и *эффективной ставкой процента.*

В главе 5 было установлено, что точки (Y, i), лежащие выше линии *IS*, соответствуют превышению предложения на блага над спросом ($Y^S > Y^D$), а точки (Y, i), лежащие ниже линии *IS*, соответствуют превышению спроса над предложением ($Y^S < Y^D$). В главе 6 было установлено, что точки (Y, i), лежащие выше линии *NM*, соответствуют превышению предложения денег над спросом ($M > N$), а точки (Y, i), лежащие ниже *NM*, соответствуют превышению спроса на деньги над их предложением ($M < N$).

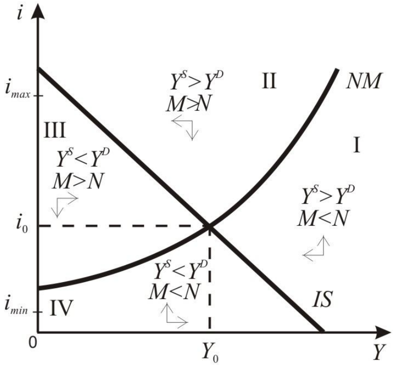

Рис. 6

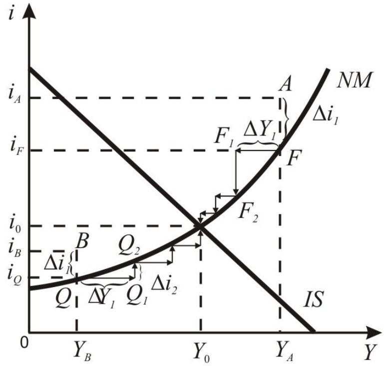

Рис. 7

Пересечение линий *IS* и *NM* делит всё множество сочетаний Y и i на четыре области, различающиеся характером неравновесия на отдельных рынках:

область I ($Y^S > Y^D$; $M < N$): перепроизводство благ и недостаток денег;

область II ($Y^S > Y^D$; $M > N$): перепроизводство благ и избыток денег;

область III ($Y^S < Y^D$; $M > N$): дефицит благ и избыток денег;

область IV ($Y^S < Y^D$; $M < N$): дефицит благ и недостаток денег.

Стрелками указаны направления изменения дохода Y и процентной ставки i, представляющих собой достижение равновесных значений Y_0 и i_0. Направления стрелок соответствуют тому, что в предыдущих главах 5 и 6 были установлены следующие зависимости:

$$Y^D = Y^D(\underset{+}{Y}, \underset{-}{i}), \tag{1}$$

$$M = M(\underset{+}{i}), \tag{2}$$

$$\underset{+}{N} = \underset{+}{P}\, l(\underset{+}{Y}, \underset{-}{i}) . \qquad (3)$$

Рассмотрим процесс достижения равновесия на примере двух точек: $A(Y_A,i_A) \in \text{II}$; $B(Y_B,i_B) \in \text{III}$. Поскольку в этих точках планы субъектов рыночных сделок при значениях (Y_A,i_A) и (Y_B,i_B) не совпадают, то последует корректировка спроса и предложения благ и денег. При этом процесс движения к равновесному состоянию может происходить по-разному. Однако можно предположить, что процесс достижения равновесия на денежном рынке (попадание на линию *NM*) будет происходить быстрее, чем на рынке благ, так как для изменения объёма производства благ требуется больше времени, чем для изменения количества находящихся в обращении денег. В соответствии с этим предположением переход из неравновесных точек в точку равновесия (Y_0,i_0) будет происходить следующим образом.

Точка А. Избыток предложения денег ($M > N$) приводит, согласно (2), к *снижению* ставки процента. Соответственно, согласно (3) спрос на деньги будет расти. Снижение ставки процента с i_{A} до i_{F} приведёт к тому, что в точке $F(Y_A,i_F)$ будет достигнуто равновесие на денежном рынке. Поскольку точка *F* лежит выше линии *IS*, то на рынке благ по-прежнему будет избыток, который начнёт уменьшаться следующим образом. Во-первых, согласно (1), уменьшение *i* на $\Delta i_1 = i_A - i_F$ приведёт за счёт увеличения инвестиционного спроса предпринимателей к увеличению Y^D. Во-вторых, сверхнормативные запасы готовой продукции заставят предпринимателей сократить производство на величину ΔY_1, на которую соответственно уменьшится предложение Y^S. Это приведёт к переходу в точку F_1, в которой образуется избыток денег, так как она лежит выше линии *NM*. Подобный процесс приспособления будет продолжаться до тех пор, пока при значениях $Y = Y_0$ и $i = i_0$ не установится совместное равновесие.

Точка B. Избыток денег приведёт к снижению ставки процента с i_B до i_Q, что приведёт в точке Q к равновесию на денежном рынке. Поскольку точка Q лежит ниже линии IS, то существовавший в исходной точке B дефицит на рынке благ согласно (1) увеличится за счёт увеличения инвестиционного спроса, что приведёт к увеличению производства, т.е. предложения, на величину ΔY_1. Уменьшение i на $\Delta i_1 = i_B - i_Q$ приведёт, согласно (3), к возрастанию спроса на деньги. Таким образом, в точке Q_1 образуется дефицит денег, так как она лежит ниже линии NM. Увеличение i на Δi_2 приведёт, согласно (2), к увеличению предложения денег, что приведёт к достижению равновесия на денежном рынке в точке Q_2. Далее процесс приспособления будет продолжаться до достижения равновесия в точке (Y_0, i_0).

Замечание. Аналитически значения Y_0 и i_0 получаются в результате решения системы уравнений, которые были получены в главах 5 и 6:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{A - I_i i}{\xi_Y}, & (4) \\[2ex] Y = \dfrac{M^-}{Pl_Y} + \dfrac{l_i}{l_Y} i, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i = \dfrac{A - \xi_Y Y}{I_i}, & (6) \\[2ex] i = -\dfrac{M^-}{Pl_i} + \dfrac{l_Y}{l_i} Y. & (7) \end{cases}$$

Глава 8. Рынок труда

На рынке труда в результате взаимодействия спроса на труд и его предложение определяется *уровень занятости*, а, следовательно, и объём предложения, так как при заданном объёме капитала K и существующей технологии, определяемой производственной функцией $F(K,L)$, объём производства благ Y становится функцией труда L. При этом на рынке труда возникает такое явление, как *безработица*, под которым понимается превышение *предложения труда* L^S над *спросом на труд* L^D. В неоклассической и кейнсианской концепциях процесс функционирования рынка труда интерпретируется неодинаково, что приводит к различным выводам относительно причин, порождающих безработицу.

§1. Неоклассическая функция спроса на труд

Рассматривается процесс производства благ

$$Y = F(K,L), \tag{1}$$

где K – капитал, L – трудовые ресурсы, $F(\cdot)$ – линейно однородная производственная функция, определяющая технологию производства. Считается, что выполняется условие *совершенной конкуренции* (*предельной производительности труда*), когда весь продукт, который получается за счёт трудовых ресурсов, направляется на их потребление. Пусть

$v = \dfrac{\partial Y}{\partial L} = \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ – предельная производительность труда;

P – уровень цен;

W – *номинальная ставка заработной платы*, т.е. количество денег, получаемых работником за свой труд.

Тогда условие совершенной конкуренции выражается в виде

$$P\frac{dY}{dL} = W. \tag{2}$$

До тех пор, пока

$$P\frac{dY}{dL} > W, \tag{3}$$

увеличение занятости сопровождается ростом прибыли.

Из (2) следует, что условие совершенной конкуренции (предельной производительности труда) может быть представлено в виде

$$\frac{dY}{dL} = w,\ w = \frac{W}{P}, \tag{4}$$

где w – *реальная ставка заработной платы*, равная номинальной ставке, нормированной на уровень цен. Очевидно, что чем больше w, тем меньше спрос предпринимательского сектора на труд L^D, т.е.

$$L^D = L^D(\underset{-}{w}). \tag{5}$$

Если i – ставка процента, то прибыль $g(L)$, достигаемая за счёт трудовых ресурсов, имеет вид

$$g(L) = PY - iK - WL = PF(K,L) - iK - WL. \tag{6}$$

Тогда явный вид функции $L^D(w)$ может быть получен из решения экстремальной задачи

$$g(L) = PF(K,L) - iK - WL \Rightarrow \max_{\{L\}}. \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть $F(K,L)$ является линейно однородной производственной функцией. Тогда функция спроса на труд $L^D(w)$ является единственным корнем уравнения

$$L^D(w):\ \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = w. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимое условие максимума

$$\frac{dg(L)}{d(L)} = 0 \tag{9}$$

функции $g(L)$ вида (7) приводит с учётом (4) к уравнению (8). Так как, согласно неоклассическим условиям,

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0,\ \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0,\ \lim_{L \downarrow 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty,\ \lim_{L \uparrow \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0, \tag{10}$$

а $w > 0$, то единственность решения уравнения (8) следует из (10). Достаточное условие максимума

$$\frac{d^2 g(L)}{dL^2} < 0 \tag{11}$$

сводится к условию

$$\frac{d^2 F(K,L)}{dL^2} < 0, \tag{12}$$

которое, согласно (10), выполняется.

Теорема 2. Пусть $F(K,L)$ является функцией Кобба – Дугласа, т.е.

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta} = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ A > 0,\ 0 < \alpha < 1. \tag{13}$$

Тогда

$$L^D(w) = \frac{[A(1-\alpha)]^{1/\alpha} K}{w^{1/\alpha}}. \tag{14}$$

Доказательство. Для функции $F(K,L)$ вида (13) уравнение (8) имеет вид

$$(1-\alpha)\, AK^{\alpha}L^{-\alpha} = w.$$

Отсюда

$$L^{\alpha} = \frac{(1-\alpha)AK^{\alpha}}{w}, \tag{15}$$

и формула (14) следует из (15).

Замечание. Свойство (5) для функции (14) выполняется.

На рис. 1, где $Y' = \dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L}$, представлено графическое построение неоклассической функции спроса на труд в соответствии с (8). Поскольку, согласно (10), $Y''(L) < 0$, то $Y'(L)$ – убывающая функция, равная тангенсу угла наклона касательной к кривой $Y = Y(L)$ при соответствующем значении L. Для простоты она изображена линейной функцией.

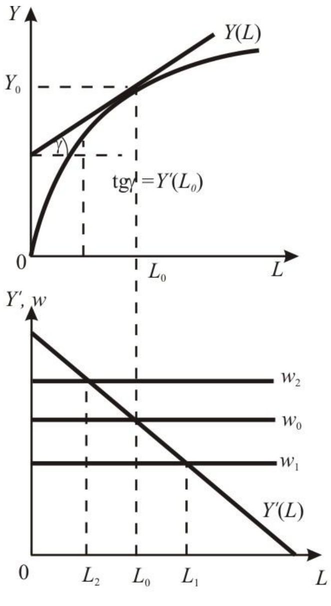

Рис. 1

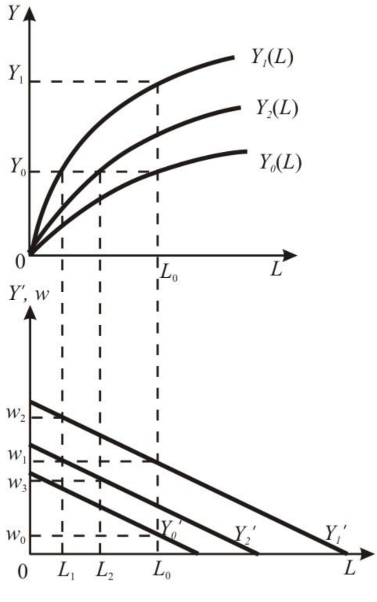

Рис. 2

Рассмотрим ситуацию, когда со временем технология производства совершенствуется, переходя последовательно от $Y_0 = F_0(K,L)$ к $Y_1 = F_1(K,L)$ таким, что $Y_0(L) < Y_1(L)$, которым соответствуют предельные производительности труда $Y_0' = \dfrac{\partial F_0(K,L)}{\partial L}$ и $Y_1' = \dfrac{\partial F_1(K,L)}{\partial L}$ такие, что $Y_0' < Y_1'$ (рис. 2). При технологии $F_0(\cdot)$ достигается объём производства Y_0 при объёме труда L_0 и ставке заработной платы w_0. При переходе к технологии $F_1(\cdot)$ для достижения прежнего объёма производства Y_0 требуется меньшее количество труда $L_1 < L_0$, который будет оплачиваться по более высокой ставке $w_2 > w_0$. Использование при технологии $F_1(\cdot)$ прежнего количества труда L_0 приведет к росту объёма производства до величины $Y_1 > Y_0$ при одновременном повышении ставки заработной платы с w_0 до $w_1 > w_0$. Очевидно, что

$$w_0 < w_1 < w_2. \tag{16}$$

Увеличение занятости путём *снижения ставки зарплаты* ниже оптимального согласно принципу совершенной конкуренции уровня равносильно задержке технического прогресса. Действительно, если при технологии $F_1(\cdot)$, вырабатывающей объём продукта Y_0, при затрате труда L_1 и ставке зарплаты w_2, понизить ставку зарплаты до величины $w_3 < w_2$, то для производства того же объёма Y_0 продукта потребуется больший объём труда $L_2 > L_1$ при технологии $Y_2 = F_2(K,L)$, которая менее эффективна, чем технология $Y_1 = F_1(K,L)$.

Вывод. Увеличение занятости путём снижения ставки зарплаты ниже уровня, определённого принципом совершенной конкуренции (принципом предельной производительности труда), приводит к задержке технического прогресса.

§2. Кейнсианская функция спроса на труд

В кейнсианской концепции спрос на труд L^D определяется *спросом на блага*, который в свою очередь следует из (1.1), *номинальная заработная плата W* считается *заданной*, а предельная производительность труда используется для определения цены спроса на труд w^D, т.е. *максимальной ставки* реальной зарплаты, которую согласны заплатить предприниматели. Таким образом, из (1.1) и (1.4) следует

Теорема 3. Спрос на труд L^D является возрастающей функцией спроса на блага, т.е.

$$L^D = L^D(\underset{+}{Y}), \tag{2}$$

а цена спроса на труд определяется в виде

$$w^D = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{dF(K, L)}{dL} \tag{3}$$

и является убывающей функцией L, т.е.

$$w^D = w^D(\underset{-}{L}), \tag{4}$$

что следует из (1.10).

Теорема 4. В случае производственной функции Кобба – Дугласа

$$L^D(Y) = \left(\frac{Y}{AK^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{5}$$

$$w^D(L) = \frac{(1-\alpha)AK^\alpha}{L^\alpha}. \tag{6}$$

Замечание. Доказать самостоятельно. Характер зависимостей (2) и (4) для функции Кобба – Дугласа согласно (5) и (6) выполняется.

Определение спроса на труд L^D и ставки реальной заработной платы отображены на рис. 3. В квадранте I изображены линии *IS* (глава 5) и *NM* (глава 6), в квадранте IV – график производственной функции $Y = Y(L)$, а в квадранте III – график предельной производительности труда $v = Y'(L) = \dfrac{\partial F(K, L)}{\partial L}$ (см. рис. 1). Точка пересечения линий IS и NM (IS – NM – модель, глава 7) определяет величину спроса на блага Y_0. На основе графика производственной функции $Y = Y(L)$ по Y_0 определяется количество труда L_0, необходимое для производства благ в объёме Y_0. На основе графика предельной производительности труда $Y'(L)$ по L_0 определяется максимальная ставка реальной заработной платы w_0, т.е. *цена спроса на труд*, что следует из условия совершенной конкуренции. Графиком кейнсианской функцииспроса на труд L^D является не весь график предельной производительности труда $Y'(L)$ (линия AC), а ломаная линия ABL_0 .

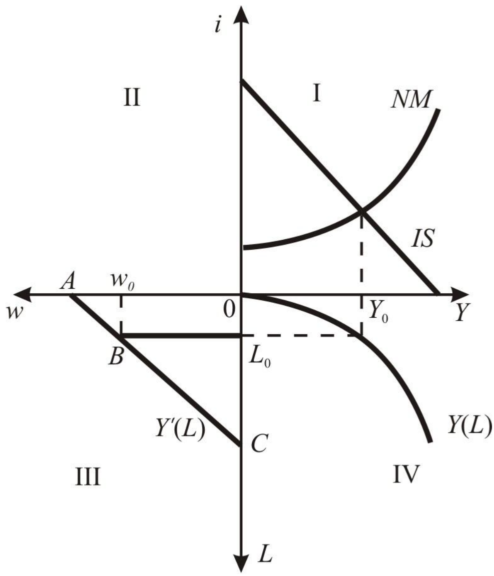

Рис.3

Фактическая ставка реальной заработной платы w не обязательно будет равна цене спроса на труд w_0. По мере роста ставки реальной заработной платы от w_0 до нуля A спрос на труд будет сокращаться с L_0 до нуля.

При ставке w ниже w_0 спрос на труд будет сохраняться на уровне L_0.

§3. Предложение труда

В неоклассической и кейнсианской концепциях имеется единство во взгляде на то, что по мере *повышения* ставки заработной платы до *определённого уровня предложение труда растёт*. Расхождения имеются по трём вопросам:

1. на какую ставку зарплаты ориентируются трудовые ресурсы при предложении своего труда на рынке труда – на номинальную W или реальную $w = \frac{W}{P}$, где P – уровень цен;
2. как изменяется номинальная ставка зарплаты;
3. как влияет ставка процента на предложение труда L^S.

Неоклассический подход. Относительно реальной ставки зарплаты w считается, что предложение труда L^S является возрастающей функцией w. В главе 5 было установлено, что повышение ставки процента i вызывает сокращение текущего и увеличение будущего потребления, а снижение i вызывает обратный эффект. Поскольку одним из благ является свободное время, то увеличение i приводит к сокращению текущего свободного времени, т.е. к увеличению занятости. Таким образом, увеличение процентной ставки i вызывает увеличение предложения труда, т.е. L^S является возрастающей функцией i. Итак, в неоклассической концепции

$$L^S = L^S(\underset{+}{w}, \underset{+}{i}), \tag{1}$$

а номинальная цена труда W, изменяясь прямо пропорционально изменению уровня цен P, *не влияет* на предложение труда.

Кейнсианский подход. Предложение труда зависит от номинальной ставки зарплаты W, причём до достижения *полной занятости* предложения труда совершенно эластично по отношению к денежной ставке зарплаты, так как безработные предлагают труд по установившейся на рынке цене. Положение о том, что при принятии решения о предложении своего труда трудовые ресурсы ориентируются не на реальную, а на номинальную зарплату, обосновывается боязнью потерять работу при наличии безработицы. В таких условиях при *росте уровня цен P* предлагается *то же самое количество туда*, что и до повышения цен, при согласии трудиться за меньшую реальную заработную плату $w = \dfrac{W}{P}$.

Полагается, что номинальная ставка зарплаты W может меняться *только в сторону увеличения*, т.к. попытки предпринимателей понизить W вызовут гораздо большее сопротивление работников, нежели постепенное и автоматическое снижение реальной зарплаты w в результате роста цен. От ставки процента предложение труда вследствие предположения о наличии избытка на рынке труда не зависит.

Расхождения между неоклассическим и кейнсианским подходами к роли ставки зарплаты при формировании предложения труда иллюстрируется на рис. 4.

Пусть для уровней цен P_0, P_1, P_2 справедливо предположение

$$P_0 < P_1 < P_2. \qquad (2)$$

Тогда для реальной ставки $w = \dfrac{W}{P}$ будет справедливо условие $w_0 > w_1 > w_2$,

$$w_0 = \frac{W}{P_0}, w_1 = \frac{W}{P_1}, w_2 = \frac{W}{P_2}. \qquad (3)$$

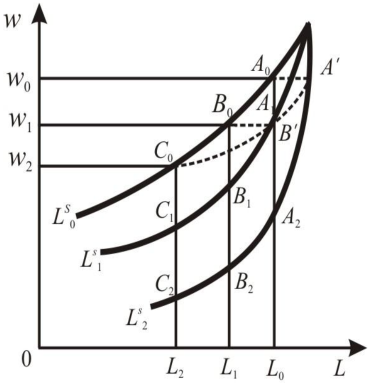

Рис. 4

При неоклассическом подходе предложение труда L^S будет изображаться кривой L_0^S и при уменьшении w, таком что $w_0 \to w_1 \to w_2$, предложение труда L^S будет уменьшаться в виде $L_0 \to L_1 \to L_2$ и движение будет происходить по кривой L_0^S сверху вниз в виде $A_0 \to B_0 \to C_0$. Поскольку при кейнсианском подходе рост уровня цен не влияет на предложение труда, то график предложения труда будет представлять из себя веер кривых L_0^S, L_1^S, L_2^S. В этом случае повышение уровня цен $P_0 \to P_1 \to P_2$ будет сопровождаться переходами с кривой на кривую вида $A_0 \to A_1 \to A_2$ при сохраняющемся предложении труда $L^S = L_0$. Соответственно, при $L^S = L_1$ имеем $B_0 \to B_1 \to B_2$, а при $L^S = L_2$ имеем $C_0 \to C_1 \to C_2$. Так как $W = wP$, то L^S при фиксированном P как функция номинальной ставки W, т.е. $L^S = L^S(W)$, будет возрастающей функцией. Таким образом, при возрастании $w_2 \to w_1 \to w_0$, т.е $W_2 \to W_1 \to W_0$ движение будет проходить по пунктирной линии $C_0 \to B' \to A'$.

§4. Равновесие на рынке труда и безработица

Равновесие на рынке труда достигается тогда, когда количество спроса на труд L^D *равняется* количеству предлагаемого труда L^S, *безработица* – когда спрос на труд меньше предлагаемого труда, а *дефицит* трудовых ресурсов – когда спрос на труд превышает *предложение* труда. Таким образом,

$L^D = L^S$ – равновесие; (1а)

$L^D < L^S$ – безработица; (1б)

$L^D > L^S$ – дефицит. (1с)

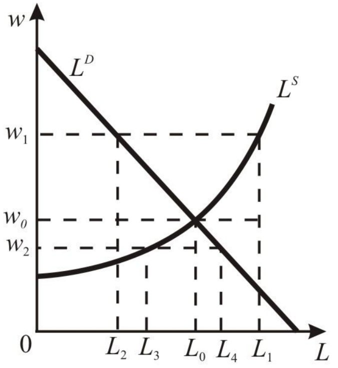

Рис. 5

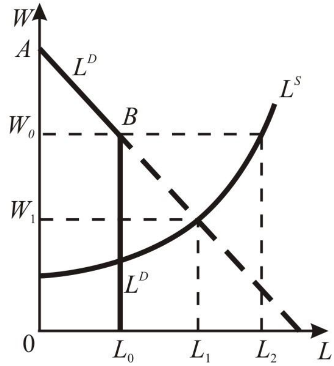

Рис. 6

Неоклассический подход (рис. 5). Равновесие на рынке труда достигается за счёт мгновенной реакции ставки реальной заработной платы w на соотношение спроса L^D и предложения L^S труда. Благодаря гибкости реальной зарплаты рыночный механизм обеспечивает полную и эффективную занятость. *Полная занятость* в данном случае означает, что каждый желающий продать свой труд по сложившейся ставке зарплаты может осуществить своё желание.

На рис. 5 на основе рис. 1 и 4 совмещены графики неоклассических функций спроса на труд L^D и предложения труда L^S. В точке (L_0, w_0) пересечения кривых L^D и L^S выполняется условие (1а), т.е. достигается равновесие на рынке труда, при котором при ставке реальной заработной платы w_0 предложение труда L^S полностью соответствует спросу на него L^D на уровне $L^S = L^D = L_0$.

Если ставка реальной зарплаты повысится до $w_1 > w_0$, то: 1) работу начнут искать трудовые ресурсы, представленные отрезком L_0L_1; 2) спрос на труд сократится с L_0 до L_2 на величину $\Delta L = L_0 - L_2$ и в результате возникнет безработица, равная $\Delta L_б = L_1 - L_2$. Конкуренция за рабочие места заставит ищущих работу согласиться на более низкую оплату труда, и ставка номинальной зарплаты W будет снижаться до тех пор, пока ставка реальной зарплаты не понизится от w_1 до w_0, а уровень предложения труда не повысится от L_2 до L_0. Таким образом ситуация на рынке стабилизируется в точке равновесия (L_0, w_0).

Если ставка реальной зарплаты понизится до $w_2 < w_0$, то: 1) предложение труда сократится с L_0 до L_3 на величину $\Delta L = L_0 - L_3$, т.е. откажется работать по заниженной ставке зарплаты количество трудовых ресурсов, равное ΔL; 2) спрос на труд увеличится до величины $L_4 > L_0$, и в результате возникнет дефицит трудовых ресурсов, равный $\Delta L_д = L_4 - L_3$. Дефицит трудовых ресурсов вынудит предпринимателей для привлечения работников повышать ставку номинальной зарплаты W, что будет побуждать незанятые трудовые ресурсы предлагать свой труд. Этот процесс будет продолжаться до тех пор пока повышение реальной зарплаты w, вызванное повышением W, достигнет величины w_0, а предложение труда не возрастёт от L_3 до L_0. Таким образом, ситуация на рынке стабилизируется в точке равновесия (L_0, w_0).

Вывод. При неоклассическом подходе равновесие на рынке труда достигается при полной занятости.

Кейнсианский подход. На рис. 6 на основе рис. 3 и 4 совмещены графики кейнсианских функций спроса на труд L^D и предложения труда L^S , где, согласно рис. 3,

$$L^D = ABL_0. \qquad (2)$$

Спрос предпринимателей на труд на уровне L_0 определяется в соответствии с величиной эффективного спроса при максимально допустимом для предпринимателей уровне номинальной ставки зарплаты W_0. Но при ставке W_0 предложение труда будет равно L_2 и на рынке труда образуется избыток трудовых ресурсов $\Delta L_б = L_2 - L_0$, определяющий уровень безработицы. Несмотря на то что при безработице ищущие работу согласны на более низкую оплату труда, т.е. на более низкий уровень W, снижение ставки зарплаты ниже W_0 не увеличит спрос на труд, так как при $W < W_0$ график L^D представляет собой вертикальную линию BL_0. Поскольку, согласно неоклассическому подходу, ситуация на рынке стабилизируется в точке (L_1, W_1), то с позиций неоклассического подхода в кейнсианской точке равновесия (L_0, W_0) цена труда завышена на величину $\Delta W = W_0 - W_1$.

Вывод. При кейнсианском подходе равновесие на рынке труда достигается при наличии безработицы, т.е. при неэффективном уровне занятости.

§5. Общее экономическое равновесие

Общее экономическое равновесие реализуется путём объединения равновесия на рынке благ, денег и капитала, рассмотренного в главе 7 (*IS-NM* модель, см. рис.7, 6), с равновесием на рынке труда при неоклассическом подходе (см. рис. 5).

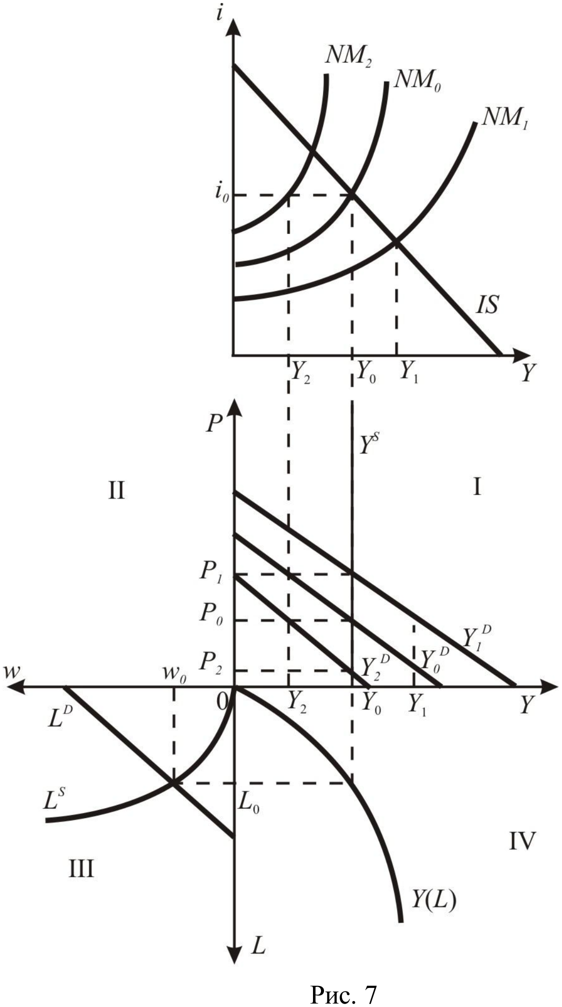

Рис. 7

Равновесие на рынке труда в неоклассической модели представлено в квадранте III в соответствии с рис. 5, где w_0 – равновесная реальная ставка зарплаты, а L_0 – равновесное количество труда. В квадранте IV кривая $Y(L)$ изображает зависимость производства благ Y от объёма трудовых ресурсов L в соответствии с неоклассической производственной функцией $Y = F(K,L)$. В квадранте I изображены три зависимости спроса на блага Y^D как убывающие функции уровня цен P и прямая $Y^S = Y_0$ предложения благ, которое равно равновесному уровню производства благ Y_0. В верхней части рисунка изображена линия *IS* и три линии *NM*, построенные в соответствии с *IS-NM* моделью. Установление общего экономического равновесия происходит следующим образом.

Пусть количество денег увеличится в два раза, что будет соответствовать сдвигу линии *NM* вправо (линия NM_1). Соответственно, вправо сдвинется и линия спроса на блага (линия Y_1^D). На рынке благ образуется дефицит $\Delta Y_д = Y_1 - Y_0$, что вызовет повышение цен, эквивалентное уменьшению количества денег, а это вызовет сдвиг линии *NM* влево. Когда уровень цен увеличится в два раза, линия *NM* займёт первоначальное положение NM_0 и на рынке установится равновесие, отличающееся от исходного возросшей номинальной ставкой зарплаты W от величины $W_0 = w_0 P_0$ до величины $W_1 = w_0 P_1$.

Пусть количество денег уменьшится в два раза, что будет соответствовать сдвигу линии *NM* влево (линия NM_2). Соответственно, влево сдвинется и линия спроса на блага (линия Y_2^D).

На рынке благ образуется избыток $\Delta Y_и = Y_0 - Y_2$, что вызовет понижение цен, эквивалентное увеличению количества денег, а это вызовет сдвиг линии *NM* вправо. Когда уровень цен уменьшится в два раза, линия *NM* займёт первоначальное положение NM_0 и на рынке установится равновесие, отличающееся от исходного уменьшившейся номинальной ставкой зарплаты W от величины $W_0 = w_0 P_0$ до величины $W_2 = w_0 P_2$.

Глава 9. Экономические циклы

§1. Основные понятия

В то время как теория экономического равновесия изучает процесс согласования стратегий деятельности экономических субъектов при данных производственных и финансовых возможностях и потребительских предпочтениях, теория экономических циклов изучает причины, вызывающие изменения экономической активности общества. *Теория экономического равновесия* – это теория *макроэкономической статики*, так как её цель состоит в определении условий, обеспечивающих равенство спроса и предложения на рынках. *Теория экономических циклов* совместно с теорией экономического роста – это теория *макроэкономической динамики*, так как её цель состоит в исследовании развития народного хозяйства во времени. Теория экономического цикла исследует причины колебаний экономической активности общества во времени (траектория Y_t), а теория роста исследует условия устойчивого роста как долговременной тенденции в развитии экономики (прямая $\bar{Y}$). При этом $\hat{Y}_t = Y_t - \bar{Y}$ характеризует соотношение между экономической активностью и экономическим ростом. Направление и степень изменения показателя или совокупности показателей, характеризующих развитие экономики, называется *экономической конъюнктурой*. Поэтому теория экономических циклов – это теория экономической конъюнктуры. *Промежуток времени* между двумя одинаковыми состояниями экономической конъюнктуры называется *экономическим циклом.*

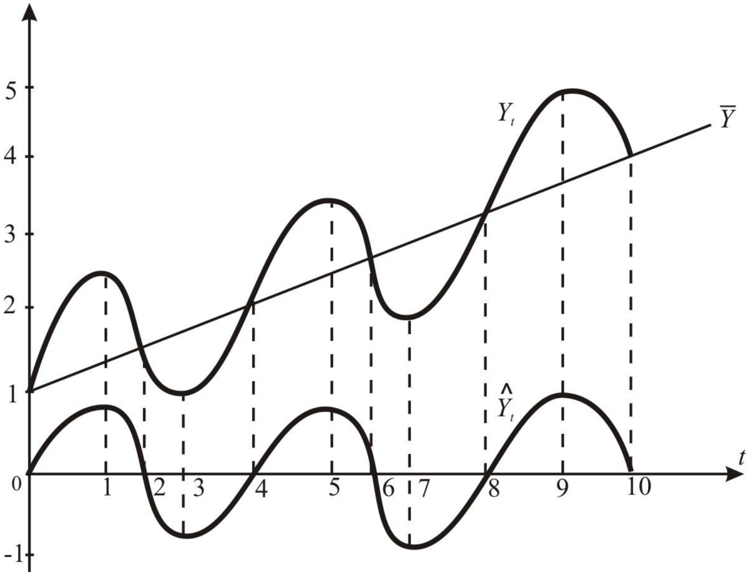

Рис. 1

В структуре экономического цикла выделяются *высшая* и *низшая* точки экономической активности. Промежутки времени между ними называются фазами *спада* (*рецессии*) и *подъёма* (*экспансии*). Длительность *цикла* равна времени (в месяцах, годах) между двумя соседними высшими либо низшими точками экономической активности. *Длительность спада* равна времени между высшей и последующей низшей точкой экономической активности. *Длительность подъёма* равна времени между низшей и последующей высшей точкой экономической активности. Таким образом:

длительность цикла – промежуток 1 – 5 или 3 – 7;

длительность спада – промежуток 1 – 3 или 5 – 7;

длительность подъёма – промежуток 3 – 5 или 7 – 9.

Выделяется четыре фазы экономического цикла.

Фаза подъёма (4 – 5). Национальный доход растёт, сокращается безработица, растут инвестиции и размер капитала. Эта фаза заканчивается *бумом* (точка 5), при котором наблюдается полная занятость трудовых ресурсов и перегрузка производственных мощностей. Уровень цен, ставка зарплаты и ставка процента очень высокие.

Фаза кризиса (5 – 6). Рост производства, наблюдавшийся в фазе подъёма, сменяется его падением.

Фаза депрессии (6 – 7). Национальный доход продолжает снижаться, безработица увеличивается, объём инвестиций близок к нулю.

Фаза оживления (7 – 8). Спад производства сменяется его подъёмом, рост безработицы прекращается, начинают расти инвестиции.

В зависимости от того, как изменяются значения экономических показателей в ходе экономического цикла, они делятся на проциклические, контрциклические и антициклические.

Проциклические – это показатели, значения которых в фазе подъёма увеличиваются, а в фазе спада уменьшаются (например, совокупный выпуск, денежная масса, ставка процента, уровень цен).

Контрциклические – это показатели, значения которых в фазе спада увеличиваются, а в фазе подъёма уменьшаются (например уровень безработицы, размеры запасов готовой продукции, число банкротств).

Антициклические – это показатели, динамика которых не связана с фазами экономического цикла (например, объём экспорта, зависящий от спроса заграницы).

Темпы изменения значений различных параметров обычно не совпадают. Например, одни из проциклических показателей ещё возрастают, тогда как другие уже убывают. В связи с этим экономические показатели подразделяются по такому свойству, как достижение максимума (минимума) до или после достижения экономическим циклом высшей точки подъёма (низшей точки спада). В связи с этим показатели делятся на опережающие, запаздывающие и совпадающие.

Опережающие (*ведущие – leading*) – это показатели, которые достигают максимума (минимума) *перед* достижением высшей точки (низшей точки).

Запаздывающие (*отстающие – lagging*) – это показатели, которые достигают максимума (минимума) *после* достижения высшей точки (низшей точки).

Совпадающие (*coincident*) – это показатели, которые изменяются *одновременно* и в соответствии с изменением экономической активности.

Примеры. *Опережающие*: изменение денежной массы; индексы фондового рынка; число вновь создаваемых предприятий; продолжительность рабочей недели. *Запаздывающие*: расходы на новые предприятия и оборудование; удельные расходы на зарплату; процентные ставки коммерческих банков. *Совпадающие*: уровень безработицы; ВНП; процентная ставка ЦБ; личные доходы.

В следующих параграфах приводится исследование двух моделей экономических циклов – модели Самуэльсона – Хикса (Samuelson – Hicks) и модели Гудвина (Goodwin).

§2. Модель Самуэльсона – Хикса

В этой модели конъюнктурные циклы связываются с соотношением между потреблением национального дохода и инвестициями в производство.

Основные предположения в модели Самуэльсона – Хикса:

1) уровень цен и ставки процента постоянны;

2) объём предложения на рынке благ абсолютно эластичен, т.е. спрос на блага постоянно удовлетворяется (кейнсианский подход).

Потребление C_t в текущем временном периоде определяется величиной дохода Y_{t-1} в предшествующем временном периоде (см. главу 5), т.е.

$$C_t = C_a + C_Y Y_{t-1}, \qquad (1)$$

где $C_a > 0$ – автономное потребление, $C_Y = \dfrac{dC_t}{dY_{t-1}}$ – предельная норма потребления, $0 < C_Y < 1$. Предпринимательский сектор осуществляет индуцированные инвестиции $I_t^{\text{и}}$ (см. главу 5), убедившись, что приращение совокупного спроса устойчиво. Принимая решение об объёме индуцированных инвестиций, предпринимательский сектор ориентируется на приращение совокупного спроса (национального дохода) $\Delta Y_{t-1,t-2} = Y_{t-1} - Y_{t-2}$, где Y_{t-1} – спрос в период времени $t - 1$, а Y_{t-2} – спрос в период времени $t - 2$. Таким образом,

$$I_t^{\text{и}} = \text{к}(Y_{t-2} - Y_{t-1}), \qquad (2)$$

где к > 0 – *акселератор*, характеризующий рост объёма инвестиций при увеличении прироста национального дохода на единицу.

Поскольку C_a не зависит от уровня производства благ, то равновесное текущее значение дохода Y_t будет определяться в виде

$$Y_t = C_Y Y_{t-1} + I_t^{\text{и}} + A = C_Y Y_{et-1} + \text{к}(Y_{t-2} - Y_{t-1}) +$$
$$+ A = (C_Y + \text{к})Y_{t-1} - \text{к}Y_{t-2} + A, \qquad (3)$$

где A – величина автономного спроса (расходов). Уравнение (3) является разностным уравнением 2-го порядка, характеризующим динамику изменения национального дохода во времени. В экономике достигается долгосрочное равновесие, когда объём национального дохода стабилизируется на уровне

$$\overline{Y} = Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = \ldots = Y_{t-n}, \tag{4}$$

где n – число временных периодов с неизменной величиной автономных расходов A. Из (3) с учётом (4) следует

$$\overline{Y} = C_Y \overline{Y} + A. \tag{5}$$

Отсюда

$$\overline{Y} = \frac{1}{1 - C_Y} A = \text{к}^{м} A, \tag{6}$$

где

$$\text{к}^{м} = \frac{1}{1 - C_Y} > 1 \tag{7}$$

есть *мультипликатор*, определяющий зависимость равновесного значения национального дохода $\overline{Y}$ от предельной нормы потребления C_Y.

Исследуем динамику изменения во времени национального дохода относительно его равновесного значения, вводя в рассмотрение величины

$$\Delta Y_t = Y_t - \overline{Y},\ \Delta Y_{t-1} = Y_{t-1} - \overline{Y},\ \Delta Y_{t-2} = Y_{t-2} - \overline{Y}. \tag{8}$$

Вычитая из соотношения (3) соотношение (5) последовательно с учётом (8) получаем

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= (C_Y + \text{к})Y_{t-1} - \text{к}Y_{t-2} - C_Y\overline{Y} + \text{к}\overline{Y} - \text{к}\overline{Y} = \\ &= (C_Y + \text{к})\, Y_{t-1} - (C_Y + \text{к})\, \overline{Y} - \text{к}\Delta Y_{t-2} = \\ &= (C_Y + \text{к})\Delta Y_{t-1} - \text{к}\Delta Y_{t-2}.\end{aligned}$$

Итак, пришли к тому, что динамика изменения во времени величины отклонения национального дохода от его равновесного значения характеризуется разностным уравнением второго порядка вида

$$\Delta Y_t = (C_Y + \text{к})\Delta Y_{t-1} - \text{к}\Delta Y_{t-2}. \tag{9}$$

Уравнение (9) является уравнением вида

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2}. \tag{10}$$

Свойства решения уравнения (10) определяются характеристическим уравнением

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0, \tag{11}$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D},\ \lambda_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D},\ \lambda_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D}, \tag{12}$$

где

$$D = a_1^2 + 4a_2$$

– дискриминант уравнения (11). Так как, согласно (9), (10),

$$a_1 = C_Y + \kappa,\ \ a_2 = -\kappa, \tag{13}$$

то

$$\lambda_{1,2} = \frac{C_Y + \kappa}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D},\ D = (C_Y + \kappa)^2 - 4\kappa. \tag{14}$$

Определение. Решение уравнения (10) называется *равновесным*, если $x_t = \text{const}$. Равновесное решение называется *устойчивым*, если $x_t \to 0$ при $t \to \infty$.

Соответственно для уравнения (9) решение $\Delta Y_t = \text{const}$ является *равновесным*, и, если при $t \to \infty$ $\Delta Y_t = \text{const} \to 0$, то такое решение будет *устойчивым*.

Исследуем свойство решений уравнения (9) в зависимости от значений корней характеристического уравнения, т.е. в зависимости от значений дискриминанта *D*, опираясь на теорию конечно-разностных уравнений.

1) $D > 0$. Согласно (14) это условие имеет вид

$$(C_Y + \kappa)^2 - 4\kappa > 0. \tag{15}$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня λ_1 и λ_2, а решение имеет вид

$$\Delta Y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t, \tag{16}$$

где A_1 и A_2 – константы, определяемые начальными условиями

$$\lambda_1 = \frac{C_Y + \kappa}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{D},\ \lambda_2 = \frac{C_Y + \kappa}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{D}. \qquad (17)$$

Если оба корня положительные, то λ_1^t и λ_2^t – монотонные геометрические прогрессии (возрастающие при $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 > 1$ и убывающие при $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < 1$). Если имеются отрицательные корни, а в нашем случае $\lambda_2 < 0$, то λ_2^t – геометрическая знакочередующаяся последовательность.

2) $D = 0$. Согласно (14) это условие имеет вид

$$(C_Y + \kappa)^2 - 4\kappa = 0. \qquad (18)$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет совпадающие вещественные корни.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{C_Y + \kappa}{2}, \qquad (19)$$

а решение имеет вид

$$\Delta Y_t = (A_1 + A_2 t)\lambda^t. \qquad (20)$$

В этом случае λ^t – знакопеременная возрастающая при $|\lambda| > 1$ и убывающая при $|\lambda| < 1$ прогрессия.

Вывод. Из (16) и (20) следует, что в случае $D \geq 0$ решение уравнения (9) будет *устойчивым*, т.е. $\Delta Y_t \to 0$, а $Y_t \to \overline{Y}$ при $t \to \infty$, в том и только в том случае, если оба вещественных корня характеристического уравнения по модулю меньше единицы, т.е.

$$|\lambda_1| < 1,\ |\lambda_2| < 1. \qquad (21)$$

3) $D < 0$. Согласно (14) это условие имеет вид

$$(C_Y + \kappa)^2 - 4\kappa < 0. \qquad (22)$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет два сопряжённых комплексных корня

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \qquad (23)$$

$i = \sqrt{-1}$, а решение имеет вид

$$\Delta Y_t = g^t (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t), \qquad (24)$$

где B_1 и B_2 – константы, определяемые начальными условиями

$$g = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{-a_2} = \sqrt{\kappa},$$

$$\alpha = \frac{a_1}{2} = \frac{C_Y + \kappa}{2},$$

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{-a_1^2 - 4a_2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\kappa - (C_Y + \kappa)^2}. \qquad (25)$$

Таким образом, при $D < 0$ решение носит *характер колебаний*, амплитуда которых возрастает при $g>1$ и убывает при $g < 1$, а частота колебаний ω такая, что, $\mathrm{tg}\omega = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Если ω выражается в радианах, то период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Вывод. В случае $D < 0$ условию устойчивости соответствует условие

$$g < 1, \qquad (26)$$

и при этом стремление $\Delta Y_t \to 0$, а $Y_t \to \overline{Y}$ будет носить характер *затухающих колебаний*. В случае $g = 1$ решение будет *неустойчивым* и будет иметь характер колебаний с *постоянной амплитудой*. В случае $g > 1$ решение будет *неустойчивым* и будет иметь характер колебаний с *возрастающей амплитудой*.

Условие $D = 0$ разделяет колебательные и неколебательные решения. Из (18) следует, что этому условию соответствует условие

$$C_Y = 2\sqrt{\kappa} - \kappa, \qquad (27)$$

которое представляет из себя функцию $C_Y = C_Y(\kappa)$, график которой изображён на рис. 2. Эта кривая делит область

$$G = \{(\kappa; C_Y) : 0 < \kappa < 4; 0 < C_Y < 1\} \qquad (28)$$

на пять подобластей с различными свойствами решений уравнения (9).

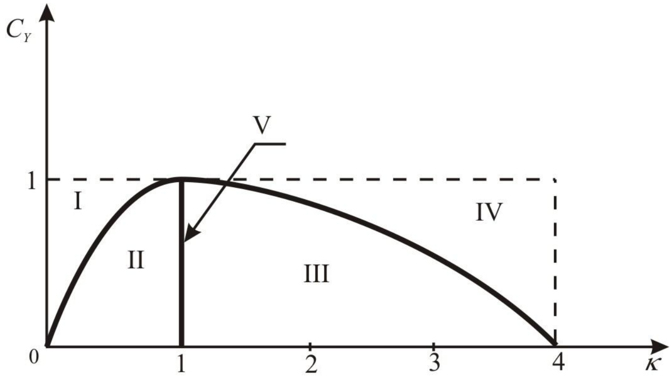

Рис. 2

В случае $D > 0$, т.е. когда

$$C_Y > 2\sqrt{\kappa} - \kappa \tag{29}$$

и точки ($\kappa; C_Y$) лежат *выше* кривой (27), получаем неколебательные решения (16), (20) (области I и IV). В случае, когда $D < 0$, т.е. когда

$$C_Y < 2\sqrt{\kappa} - \kappa \tag{30}$$

и точки ($\kappa; C_Y$) лежат *ниже* кривой (27), получаем *колебательные* решения (24) (области II и III).

В области V , т.е. для точек ($\kappa; C_Y$) на вертикальной прямой

$$L = \{(\kappa; C_Y) : \kappa = 1; 0 < C_Y < 1\} \tag{31}$$

получаем колебательное решение с *постоянной амплитудой* (см. рис. 7).

1) *Ситуация* $D < 0$, т.е. имеет место выполнение условия (30).

а) Пусть выполняется условие $g < 1$, т.е. имеют место затухающие колебания. Условию $g < 1$, согласно (25) соответствует условие

$$\kappa < 1. \qquad (32)$$

Таким образом, имеем следующий вывод:

Область II – область *устойчивых колебательных* решений (см. рис. 3).

б) Пусть выполняется условие $g > 1$, т.е. имеют место колебания с возрастающей амплитудой. Условию $g > 1$, согласно (25) соответствует условие

$$\kappa > 1. \qquad (33)$$

Таким образом, имеем следующий вывод:

Область III – область *неустойчивых колебательных* решений (см. рис. 4).

2) *Ситуация* $D > 0$, т.е. имеет место выполнение условия (29). Так как, по теореме Виета, $\lambda_1\lambda_2 = -a_2 = \kappa$, то в данной ситуации условие (32) является необходимым условием устойчивости, а достаточным является условие (21). Поскольку, согласно (17), $\lambda_1 > \lambda_2$, то достаточное условие устойчивости $|\lambda_1| < 1$ приобретает вид

$$C_Y < 1. \qquad (34)$$

Таким образом, имеем следующие результаты:

а) область I, где

$$\kappa < 1,\ C_Y < 1, \qquad (35)$$

является областью *устойчивых неколебательных* решений (рис. 5);

б) область IV, где

$$\kappa > 1,\ C_Y < 1 \qquad (36)$$

является областью *неустойчивых неколебательных* решений (рис. 6).

Вывод. В модели Самуэльсона – Хикса функционирование экономики в виде экономических циклов (рис. 3, 4, 7) осуществляется в областях II,III,V (рис. 2), в которых соотношения между предельной нормой потребления C_Y и инвестиционным акселератором κ определяются соотношениями (30)–(33). Характер развития экономики при этом различный.

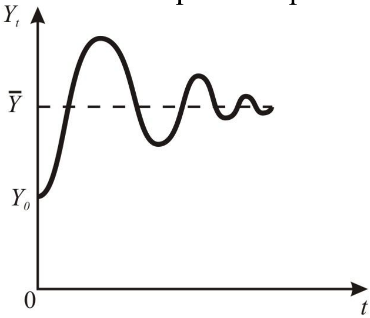

Рис. 3

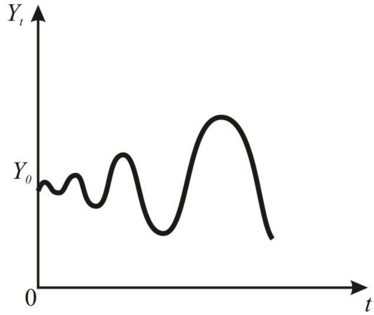

Рис. 4

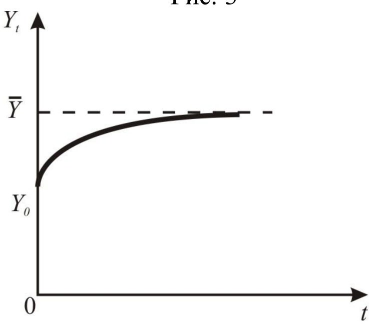

Рис. 5

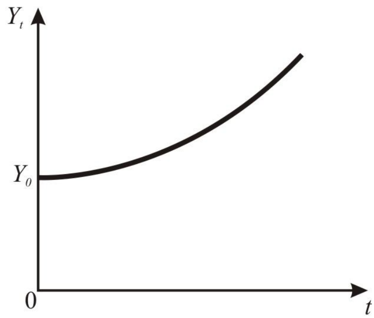

Рис. 6

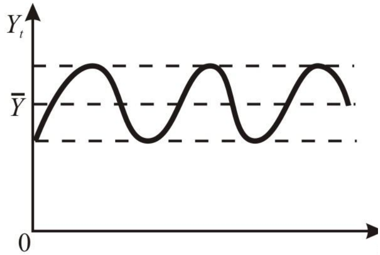

Рис. 7

Замечание. Дать экономическую интерпретацию всем пяти вариантам развития экономики, которые представлены на рис. 3–7.

§3. Модель Гудвина

В этой модели конъюнктурные циклы связываются с изменениями во времени доли труда в национальном доходе и доли трудовых ресурсов в общем количестве населения (показателя занятости), что вызывает изменение во времени распределения национального дохода между потреблением и накоплением. Пусть:

t – текущий период времени;

Y_t – национальный доход;

w_t – реальная ставка заработной платы;

L_t^* – общие трудовые ресурсы (население);

L_t – занятые в производстве трудовые ресурсы;

$\frac{L_t}{L_t^*} = v_t$ – доля трудовых ресурсов в общем количестве населения (показатель занятости);

$\frac{Y_t}{L_t} = y_t$ – средняя производительность труда;

K_t – основные фонды (капитал);

$\frac{K_t}{Y_t} = \eta_t$ – капиталоёмкость национального дохода;

$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \delta_t$ – доля труда в национальном доходе;

$\frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = x_t$ – темп прироста показателя x.

Основные предположения:

$$L_t^* = \frac{L_{t+1}^* - L_t^*}{L_t^*} = L^* = l = \text{const};$$

$$y_t = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = y = m = \text{const}; \qquad (1)$$

$$\eta_t = \eta = \text{const}.$$

Так как

$$Y_t = F(K_t, L_t), \tag{2}$$

где $F(\cdot)$ – линейно-однородная неоклассическая производственная функция, то при условиях (1) темпы роста национального дохода и капитала совпадают, т.е.

$$\hat{Y}_t = \hat{K}_t, \tag{3}$$

где

$$\hat{Y}_t = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t},\ \hat{K}_t = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t}. \tag{4}$$

Так как

$$\delta_t = w_t \frac{L_t}{Y_t} = \frac{w_t}{y_t}, \tag{5}$$

то

$$\hat{\delta}_t = \hat{w}_t - \hat{y}_t = \hat{w}_t - m, \tag{6}$$

где

$$\hat{\delta}_t = \frac{\delta_{t+1} - \delta_t}{\delta_t},\ \hat{w}_t = \frac{w_{t+1} - w_t}{w_t}. \tag{7}$$

Вывод. Темп прироста доли труда в национальном доходе равен разности темпов прироста реальной зарплаты и средней производительности труда.

Для темпа изменения ставки реальной заработной платы используется модель

$$\hat{w}_t = \rho\nu_t - \gamma,\ \rho > 0,\ \gamma > 0. \tag{8}$$

Использование (8) в (6) показывает, что темп изменения доли труда в национальном доходе представляется в виде

$$\hat{\delta}_t = \rho\nu_t - (\gamma + m). \tag{9}$$

Так как $v_t = \frac{L_t}{L_t^*}$, то темп прироста показателя занятости

$$\hat{\nu}_t = \frac{\nu_{t+1} - \nu_t}{\nu_t} \tag{10}$$

будет равен разности между темпами прироста числа работающих

$$\hat{L}_t = \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t} \tag{11}$$

и числа предлагающих труд $\hat{L}_t = l,$ т.е.

$$\hat{\nu}_t = \hat{L}_t - l. \tag{12}$$

Так как $L_t = \frac{Y_t}{y_t},$ то темп прироста работающих $\hat{L}_t$ равен разности между темпами прироста национального дохода $\hat{Y}_t$ и средней производительности труда $\hat{y}_t = m,$ т.е.

$$\hat{L}_t = \hat{Y}_t - m. \tag{13}$$

Использование (3) в (13) даёт, что

$$\hat{L}_t = \hat{K}_t - m. \tag{14}$$

Приращение капитала $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$ равно объёму инвестиций I_t, которые, согласно «Золотому правилу накопления» (см. главу 3), определены в виде

$$I_t = (1 - \delta_t) Y_t, \tag{15}$$

где $\tilde{\delta}_t = (1 - \delta_t)$ есть доля капитала в национальном доходе. Тогда

$$\hat{K}_t = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} = \frac{(1-\delta_t)Y_t}{K_t} = \frac{1-\delta_t}{\eta}. \tag{16}$$

Тогда из (12), (14), (16) следует

$$\hat{\nu}_t = \frac{1}{\eta} - (m+l) - \frac{\delta_t}{\eta}. \tag{17}$$

Перейдём от разностных уравнений (9) и (17) к дифференциальным уравнениям, полагая

$$t + 1 = t + \Delta t,\ \delta_{t+\Delta t} - \delta_t = \Delta\delta_t,\ \ \nu_{t+\Delta t} - \nu_t = \Delta\nu_t. \tag{18}$$

Тогда в пределе при $\Delta t \to 0$

$$\Delta t \to dt, \Delta\delta_t \to d\delta_t, \Delta\nu_t \to d\nu_t \tag{19}$$

и из (9), (17) следует система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\delta_t}{dt} = [\rho\nu_t - (m+\gamma)]\delta_t, \tag{20}$$

$$\frac{d\nu_t}{dt} = \frac{1 - \eta(m+l) - \delta_t}{\eta}\gamma_t. \tag{21}$$

Вывод. Система двух дифференциальных уравнений (20) и (21), описывающая совместное изменение во времени доли труда в национальном доходе δ_t и доли трудовых ресурсов в общем количестве населения ν_t, составляет модель Гудвина для исследования конъюнктурных колебаний в экономике, т.е. экономических циклов.

Теорема 1. Семейство интегральных кривых $\{X_t\colon Y_t\}$ на плоскости $\{\delta_t; \nu_t\}$ имеет вид

$$X_t = \delta_t^g \exp\left\{-\frac{\delta_t}{\eta}\right\} = X_t(\delta_t), \tag{22}$$

$$Z_t = \nu_t^h \exp\{\rho\nu_t\} = Z_t(\nu_t), \tag{23}$$

$$Z_t = e^A X_t, \tag{24}$$

где A – произвольная постоянная,

$$g = \frac{1 - \eta(m+l)}{\eta},\ \ h = -(m+\gamma). \tag{25}$$

Доказательство.

Из (20) и (21) следует,

$$d\delta_t = \left[\rho - \frac{m+\gamma}{\nu_t}\right]\delta_t \nu_t dt\,, \tag{26}$$

$$d\nu_t = \left[\frac{1-\eta(m+l)}{\eta\delta_t} - \frac{1}{\eta}\right]\delta_t \nu_t dt. \tag{27}$$

Поделив (26) на (27), получаем

$$\left[\frac{1}{\eta} - (m+l)\right]\frac{d\delta_t}{\delta_t} - \frac{1}{\eta} d\delta_t = -(m+\gamma)\frac{d\nu_t}{\nu_t} + \rho d\nu_t. \tag{28}$$

Интегрирование слева и справа в (28) даёт

$$\frac{1-\eta(m+l)}{\eta}\ln(\delta_t) - \frac{1}{\eta}\delta_t + A = -(m+\gamma)\ln(\nu_t) + \rho\nu_t,$$

где A – произвольная константа интегрирования. С учётом обозначений (25) последнее соотношение запишется в виде

$$g\ln(\delta_t) - \frac{1}{\eta}\delta_t + A = h\ln(\nu_t) + \rho\nu_t.$$

Отсюда

$$\exp\left\{g\ln(\delta_t) - \frac{1}{\eta}\delta_t + A\right\} = \exp\{h\ln(\nu_t) + \rho\nu_t\}\,,$$

или

$$\exp\{g\ln(\delta_t)\}\exp\left\{-\frac{1}{\eta}\delta_t\right\}\exp\{A\} =$$

$$= \exp\{h\ln(\nu_t)\}\exp\{\delta\nu_t\}. \tag{29}$$

Так как

$$\begin{aligned} &\exp\{g\ln(\delta_t)\} = \exp\{\ln(\delta_t^g)\} = \delta_t^g\,, \\ &\exp\{h\ln(v_t)\} = \exp\{\ln(v_t^h)\} = v_t^h\,, \end{aligned} \tag{30}$$

то использование (30) в (29) даёт

$$\delta_t^g \exp\left\{-\frac{\delta_t}{\eta}\right\}e^A = \nu_t^h \exp\{\rho\nu_t\}. \tag{31}$$

Использование (22), (23) в (31) приводит к (24). Теорема доказана.

Теорема 2. Если

$$\eta(m + l) < 1, \tag{32}$$

то функции X_t и Z_t обладают следующими свойствами:

1) $X_t(\delta_t)$ и $Z_t(\nu_t)$ – положительные функции, т.е.

$$X_t(\delta_t) > 0,\ Z_t(\nu_t) > 0; \tag{33}$$

2) экстремум функции X_t, являющийся *максимумом*, достигается в точке

$$\delta_t = \delta^* = g\eta = 1 - \eta(m + l) \tag{34}$$

и при этом

$$\begin{gathered}\max X_t = X_t(\delta^*) = X^* = (\delta^*)^g \exp\left\{-\frac{\delta^*}{\eta}\right\} = \\ [1 - \eta(m + l)]^{\frac{1-\eta(m+l)}{\eta}} \exp\left\{-\frac{1 - \eta(m + l)}{\eta}\right\} = \text{const};\end{gathered} \tag{35}$$

3) экстремум функции Z_t, являющийся *минимумом*, достигается в точке

$$\nu_t = \nu^* = -\frac{h}{\rho} = \frac{m + \gamma}{\rho} \tag{36}$$

и при этом

$$\begin{gathered}\min Z_t = Z_t(\nu^*) = Z^* = (\nu^*)^h \exp\{\rho\nu^*\} = \\ = \left[\frac{m + \gamma}{\rho}\right]^{-(m+\gamma)} \exp\{m + \gamma\} = \text{const}.\end{gathered} \tag{37}$$

Доказательство. Независимость X^* и Z^* от времени t следует из (35) и (37) с учётом того, что, согласно (1) и (8), параметры η, m, l, ρ, γ являются положительными константами. Свойства (33) следуют из (22), (23) с учётом того, что $\delta_t > 0$, $\nu_t > 0$.

Исследуем функцию $X_t(\delta_t)$. Из (22) следует

$$\frac{dX_t(\delta_t)}{d\delta_t} = \left(\frac{g}{\delta_t} - \frac{1}{\eta}\right)\delta_t^g \exp\left\{-\frac{\delta_t}{\eta}\right\} = \left(\frac{g}{\delta_t} - \frac{1}{\eta}\right)X_t(\delta_t)\,. \tag{38}$$

Условием экстремума функции $X_t(\delta_t)$ является условие $\frac{dX_t(\delta_t)}{d\delta_t} = 0,$ т.е.. согласно (38), условие

$$\left(\frac{g}{\delta_t} - \frac{1}{\eta}\right) X_t(\delta_t) = 0\,. \qquad (39)$$

Так как $X_t(\delta_t) > 0$, то из (39) следует, что экстремум $X_t(\delta_t)$ достигается в точке $\delta_t = \delta^*$, определяемой формулой (34). Из (38) следует, что

$$\frac{d^2 X_t(\delta_t)}{d\delta_t^2} = \left(\frac{g}{\delta_t} - \frac{1}{\eta}\right)\frac{dX_t(\delta_t)}{d\delta_t} - \frac{g}{\delta_t^2} X_t(\delta_t) =$$

$$= \left[\left(\frac{g}{\delta_t} - \frac{1}{\eta}\right)^2 - \frac{g}{\delta_t^2}\right] X_t(\delta_t). \qquad (40)$$

Тогда, с учётом (34), из (40) следует, что

$$\left.\frac{d^2 X_t(\delta_t)}{d\delta_t^2}\right|_{\delta_t = \delta^*} = -\frac{1}{g\eta^2} X_t(\delta^*). \qquad (41)$$

Так как, согласно (25), (32) и (33), $X_t(\delta^*) > 0$, $g > 0$, то из (41) следует, что

$$\left.\frac{d^2 X_t(\delta_t)}{d\delta_t^2}\right|_{\delta_t = \delta^*} < 0, \qquad (42)$$

т.е. точка $\delta_t = \delta^*$ является максимумом функции $X_t(\delta_t)$.

Исследуем функцию $Z_t(\nu_t)$. Из (23) следует

$$\frac{dZ_t(\nu_t)}{d\nu_t} = \left(\frac{h}{\nu_t} + \rho\right) \nu_t^h \exp\{\rho\nu_t\} = \left(\frac{h}{\nu_t} + \rho\right) Z_t(\nu_t). \qquad (43)$$

Условием экстремума функции $Z_t(\nu_t)$ является условие $\frac{dZ_t(\nu_t)}{d\nu_t} = 0,$ т.е., согласно (43), условие

$$\left(\frac{h}{\nu_t} + \rho\right) Z_t(\nu_t) = 0\,. \qquad (44)$$

Так как $Z_t(\nu_t) > 0$, то из (44) следует, что экстремум $Z_t(\nu_t)$ достигается в точке $\nu_t = \nu^*$, определяемой формулой (36). Из (43) следует, что

$$\frac{d^2 Z_t(\nu_t)}{d\nu_t^2} = \left[\left(\frac{h}{\nu_t} + \rho\right)^2 - \frac{h}{\nu_t^2}\right] Z_t(\nu_t). \qquad (45)$$

Тогда, с учётом (36), из (45) следует, что

$$\left.\frac{d^2 Z_t(\nu_t)}{d\nu_t^2}\right|_{\nu_t=\nu^*} = -\frac{\rho}{h} Z_t(\nu^*). \qquad (46)$$

Так как, согласно (25) и (33), $Z_t(\nu^*) > 0$, $h < 0$, то из (46) следует, что

$$\left.\frac{d^2 Z_t(\nu_t)}{d\nu_t^2}\right|_{\nu_t=\nu^*} > 0, \qquad (47)$$

т.е. точка $\nu_t = \nu^*$ является минимумом функции $Z_t(\nu_t)$. Теорема доказана.

На рис. 8 отражены результаты проведённого исследования. В квадрантах II и IV изображены графики соответственно функций $Z_t(\nu_t)$ и $X_t(\delta_t)$. В квадранте III прямая L является вспомогательной для отражения взаимосвязи между значениями $Z_t(\nu_t)$ и $X_t(\delta_t)$ согласно (24). В квадранте I эллипс *ABCD* является фазовым портретом (интегральной кривой) решений системы уравнений (20), (21), т.е. является совокупностью точек $\{\delta_t;\nu_t\}$, удовлетворяющих этой системе.

Замечание. Графики функций $Z_t(\nu_t)$ и $X_t(\delta_t)$ изображены в виде симметричных кривых. Если эти кривые несимметричные, то эллипс *ABCD* деформируется в замкнутую выпуклую кривую неэллиптической формы.

Проведём анализ полученных результатов. Производство национального дохода идёт в соответствии с соотношением

$$Y_t = F(K_t, L_t), \qquad (48)$$

где $F(\cdot)$ – линейно-однородная производственная функция, K_t – основные фонды (капитал), L_t – трудовые ресурсы.

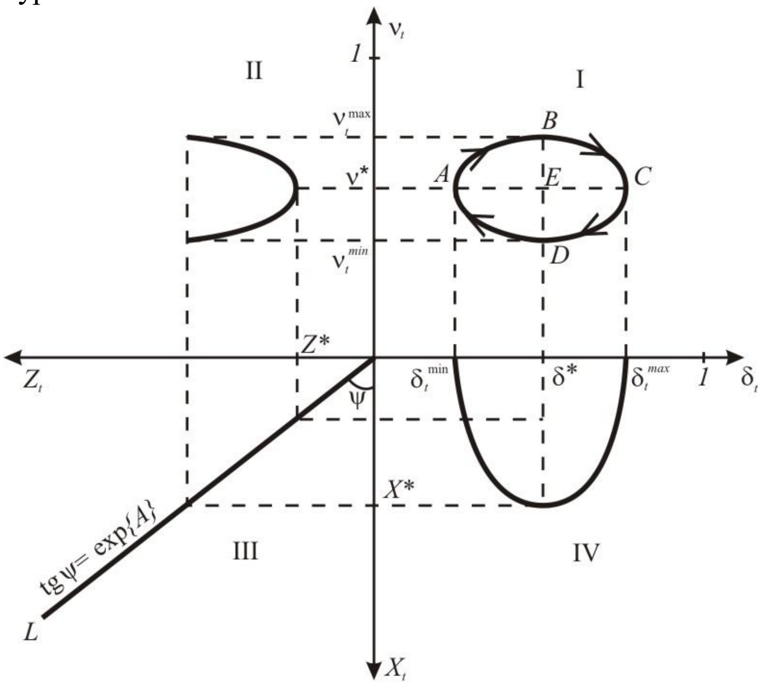

Рис. 8

Распределение Y_t осуществляется в виде (глава 3)

$$Y_t = I_t + C_t = s(t)Y_t + [1 - s(t)]Y_t\,, \qquad (49)$$

где I_t – накопление, C_t – потребление, $s(t)$ – норма накопления, $\tilde{s} = [1 - s(t)]$ – норма потребления. Согласно «Золотому правилу накопления» (глава 3):

$$I_t = Y_t^K = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial K_t} K_t\,,\; C_t = Y_t^L = \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L(t)} L(t), \qquad (50)$$

где Y_t^K – доля национального дохода, созданная за счёт капитала, Y_t^L – доля национального дохода, созданная за счёт труда. Поскольку

$$\delta_t Y_t = \omega_t L_t\,, \qquad (51)$$

то из (5), (49) следует, что

$$\delta_t = \tilde{s}(t) = 1 - s(t),\ s(t) = 1 - \delta_t. \qquad (52)$$

Таким образом

$$Y_t = (1-\delta_t)Y_t + \delta_t Y_t, \qquad (53)$$

где

$$(1-\delta_t)Y_t = Y_t^K,\ \delta_t Y_t = Y_t^L\,, \qquad (54)$$

т.е. $\delta_t = [1 - s(t)]$ есть доля труда в национальном доходе, а $\tilde{\delta}_t = 1 - \delta_t = s(t)$ – доля капитала в национальном доходе.

Состояние равновесия $E = (\delta^*, \nu^*)$. В этом случае $\nu_t = \nu^* = \text{const}$, т.е. доля трудовых ресурсов в общем количестве населения находится на постоянном уровне. Соответственно $\delta_t = \delta^* = \text{const}$, т.е. доля труда в национальном доходе находится на постоянном уровне. Тогда оставшейся доли капитала $(1 - \delta_t) = (1-\delta^*) = \text{const}$ будет достаточно, чтобы поддерживать занятость на постоянном уровне.

Динамическое состояние (*состояние динамических циклов*). Нахождение экономики в точке $E = (\delta^*, \nu^*)$ является неустойчивым, так как любое отклонение, например, ν от ν^* вызовет соответствующее отклонение δ от δ^* и экономика окажется в некоторой точке $(\delta_t, \nu_t) \in ABCD$.

Участок AB. Точке *A* соответствуют значения $\nu_t = \nu^*,\ \delta_t = \delta_t^{\min},\ \tilde{\delta}_t = \tilde{\delta}_t^{\max}$, т.е. *точка A* соответствует *максимальной доле капитала* в национальном доходе и равновесной занятости. Такая ситуация стимулирует рост инвестиций, вследствие которых *возрастает спрос на труд*. Происходит движение по участку *AB*, когда возрастает доля труда δ_t в национальном доходе и показатель занятости ν_t. В точке *B* показатель занятости достигает своего максимума $\nu_t = \nu_t^{\max}$ и образуется *избыточная занятость*. На участке *AB* национальный доход Y_t растёт.

Участок BC. Рост занятости вызывает увеличение L_t, а рост инвестиций – повышение ставки заработной платы ω_t. То и другое увеличивает долю труда δ_t в национальном доходе, которая достигает своего максимума $\delta_t = \delta_t^{\max}$ в точке *C*. Рост фонда оплаты $\omega_t L_t$ труда вызывает снижение прибыли. Снижение прибыли вызывает сокращение инвестиций, что вызывает сокращение занятости ν_t от значения $\nu_t^{\max}$ до значения ν^* в точке *C*. То и другое вызывает уменьшение Y_t, т.е. на участке *BC* национальный доход Y_t *уменьшается.*

Участок CD. Сокращение занятости ν_t продолжается, достигая своего минимума $\nu_t = \nu_t^{\min}$ в точке *D*. Рост безработицы вызывает уменьшение L_t и снижение ставки заработной платы ω_t, что приводит к уменьшению доли труда в национальном доходе δ_t от $\delta_t^{\max}$ до δ^* в точке *D*, соответственно повышая долю капитала $\tilde{\delta}_t$ от $\tilde{\delta}_t^{\min}$ до $\tilde{\delta}^* = 1 - \delta^*$, что *увеличивает прибыль*. Национальный доход Y_t на участке *CD* продолжает *уменьшаться*.

Участок DA. Доля труда в национальном доходе δ_t продолжает понижаться от δ^* до $\delta_t^{\min}$ в точке *A*, соответственно повышая долю капитала от $\tilde{\delta}^*$ до $\tilde{\delta}^* = \tilde{\delta}_t^{\max}$. Увеличивающаяся прибыль вызывает увеличение инвестиций, что увеличивает спрос на труд. Увеличивающийся спрос на труд увеличивает уровень занятости L_t, что приводит к увеличению показателя занятости ν_t от $\nu_t^{\min}$ до ν^* в точке A. То и другое вызывает рост национального дохода Y_t на участке DA. Далее процесс повторяется.

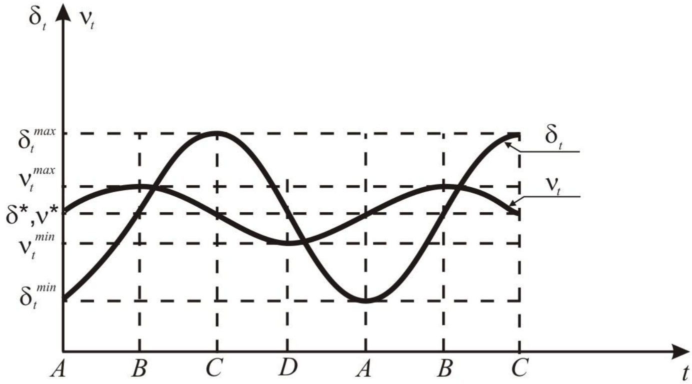

Рис. 9

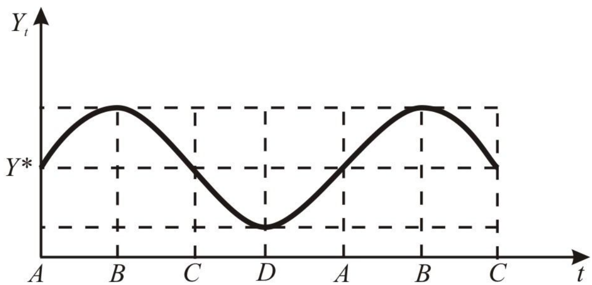

Рис. 10

Согласно проведённому анализу на рис. 9 изображены кривые δ_t и ν_t, отражающие динамику изменения доли труда в национальном доходе и показателя занятости, а на рис. 10 – циклические изменения во времени национального дохода Y_t.

Замечание. Система дифференциальных уравнений (20), (21) аналогична системе дифференциальных уравнений Вольтерра-Лотки, описывающих процесс изменения во времени количества биологических популяций типа «хищник – жертва», сосуществующих на единой территории. Например, лисы пожирают зайцев, но когда зайцев становится мало, тогда из-за недостатка корма уменьшается и количество лис, что способствует росту числа зайцев. Это в свою очередь из-за увеличения количества корма способствует увеличению количества лис. Далее весь процесс продолжается. Таким образом, изменение во времени количества лис и количества зайцев носит циклический характер вида закономерности, изображённой на рис. 9.

Модель Самуэльсона-Хикса и модель Гудвина нельзя воспринимать как альтернативные или конкурирующие. Эти модели дополняют друг друга, отражая различные аспекты такого сложного явления, как экономические циклы.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука,1984.

Гальперин В.М. и др. Макроэкономика. С.Пб. ГУЭФ,1997.

Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис пресс, 2002.

Кейнс Д. Общая теория занятости, процента и денег. М.: ИЛ, 1978.

Лившиц А.Я., Никулина Л.Н. Введение в рыночную экономику. М.: ВШ, 1995.

Сакс Д., Лоррен Ф. Макроэкономика: глобальный подход. М.: ИЛ, 1996.

Терехов Л.П. Производственные функции. М.: Наука, 1974.

Mankiw N.G. Economics. New York: Worth Publ., 2003.

Дополнительная литература

Вольтерра В.Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука,1976.

Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: ФМЛ, 1955.

Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: ФМЛ, 1967.

Дёмин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учётом портебления работодателей. // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. 140-155.

Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ВШ, 1967.

Cobb W.,Douglas P.H. A theory of production. //Amer. Econ. Revew. 1928.

Friedman M. A theory of consumption function. Princeton: Princ. Univ. Press. 1957.

Friedman M. Studies in the quantity theory of money. Chicago: Chicago Univ. Press, 1956.

Hicks J. A contribution to the theory of the trade cycle. Oxford: Oxford Univ. Press, 1959.

Godwin R.M. A growth cycle. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1967.

Markowitz H.M. Portfolio Selection. // J. of Finance. 1952. V.7. №.2

Phelps E.S. Golden rules jf econovic growth. New York: Norton, 1966.

Rubinstein M.E. A comparative statics analysis of risk premiums. // Journal of Buisiness. 1973. V. 46.

Samuelson P. Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. // Revew of Econ. Stat., 1939. V.21.

Solow R.A. Contribution to the theory of economic growth. // Quart. J. Econom. 1956, V. 70, p. 65-94.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Дёмин Николай Серапионович,
Грекова Татьяна Ивановна

МАКРОЭКОНОМИКА

Учебное издание

Редактор Н.А. Афанасьева
Корректор А.Н. Гранкина
Дизайнер обложки В.Ю. Мальцева

Подписано к печати__________________ Формат 60×841.16
Бумага офсетная. Гарнитура Times.

Усл. Печ. Л. 13
Тираж 100 экз. Заказ
Издательство «ТМЛ–Пресс»
634050,г. Томск,ул. Гагарина 31, оф 49